

при $t \rightarrow \infty$, то можно считать, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_j)^2 \leq C^2 g(n), \quad g(n) = \int_n^{\infty} [f(t)]^2 dt.$$

Тогда величина n , минимизирующая

$$C_1 n N^{-1} + C^2 g(n), \quad (12.14)$$

будет приводить к почти оптимальной оценке $\pi_{n(N), N}^*(\cdot)$.

Обобщим постановку задачи. Предположим, что дана последовательность подпространств \mathcal{E}_n , уже не обязательно монотонная (т. е. необязательно $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}$), причем скорость $g(n)$ сближения неизвестной плотности $p(\cdot)$ с подпространствами E_n известна. И в такой постановке выбор наиболее выгодной размерности $n = v(N)$ проекционной оценки сводится к задаче минимизации выражения вида (12.14).

Определение 12.1. Говорят, что положительная варианта ω_n убывает, как $g(n) : \omega_n \asymp g(n)$ (или по типу $g(n) : \omega_n(g(n))$), если найдут положительные числа b и B (соответственно, a , A , b и B) такие, что

$$b \cdot g(n) \leq \omega_n \leq B \cdot g(n); \quad (12.15)$$

$$b \cdot g(an) \leq \omega_n \leq B \cdot g(An), \quad (12.16)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, или хотя бы при $n \geq n_0$. В качестве измерителей скорости убывания мы будем рассматривать только гладкие неотрицательные выпуклые функции $g(y)$, монотонно стремящиеся к нулю при $y \rightarrow \infty$:

$$\forall y > 0, \quad g(y) > 0, \quad g'(y) < 0, \quad g''(y) > 0; \quad g(y) \rightarrow 0. \quad (12.17)$$

$y \rightarrow \infty$

Если гладкая функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (12.16), то связанная с ней гладкая функция

$$z(y) = y/g(y)$$

монотонно возрастает от нуля до бесконечности. Следовательно, существует также монотонно возрастающая от нуля до бесконечности непрерывная (и гладкая) обратная функция $\Gamma(y)$:

$$\forall y > 0, \quad \Gamma(y/g(y)) = y \quad (12.18)$$

В частности, если $g(y) = y^{-k}$, то $\Gamma(z) = z^{1/(k+1)}$.

Лемма 12.1. Если функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (12.17), а $\Gamma(z)$ определено связью (12.18), то при любых ξ , η , $\lambda > 0$, когда $n \in \mathbb{N}$, а $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \min_n [\eta \cdot g(\xi n) + \lambda n N^{-1}] &\asymp \min_n \max \{\eta \cdot g(\xi n), \lambda n N^{-1}\} \asymp \\ &\asymp \max_n \min \{\eta \cdot g(\xi n), \lambda n N^{-1}\} \asymp N^{-1} \Gamma(N) \end{aligned} \quad (12.18)$$

Доказательство этой леммы носит технический характер, см. [34, лемма 25.4].