

$= (\omega^1, \dots, \omega^N)$  только уменьшим потери

$$\forall P_t \in \mathcal{C}_h, \forall \varepsilon, 2I(P_t: Q_\varepsilon) \geq 2I(P_t: U_\varepsilon); \mathfrak{R}_{P_t(Q)} \geq \mathfrak{R}_{P_t(U)}. \quad (10.51)$$

Наконец, если мы перейдем к квазипроекции  $P_\tau$  на  $\mathcal{G}$ , то для подсемейства  $\mathcal{C}_r(\theta)$ ,  $r < h$ , будет справедлива оценка (10.43) леммы 10.11:

$$\forall P_t \in \mathcal{C}_r, \forall \varepsilon \in \Omega^N, 2I(P_t: U_\varepsilon) \geq 2I(P_t: P_\tau) - B(n) \sqrt{\eta} r^2 - C(n) r^4.$$

Поэтому, для риска оценки  $P_\tau$ ,  $\tau = \tau(\omega^1, \dots, \omega^N)$

$$\forall P_t \in \mathcal{C}_r, \mathfrak{R}_{P_t(U)}(P_t) \geq \mathfrak{R}_\tau(P_t) - B(n) \sqrt{\eta} r^2 - C(n) r^4. \quad (10.52)$$

Оценка  $\tau(\omega^1, \dots, \omega^N)$  параметра  $t$  удовлетворяет условиям теоремы 10.6. Отсюда для средних по  $C_r$  рисков по (10.22) и (10.50—52) при  $\eta < n^{-1}$  и  $r < 1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathfrak{R}_{P_t(R)}}(P_t) &\geq nN^{-1} - A(n) \eta N^{-1} - nr^{-1} N^{-3/2} - \\ &\quad - B(n) \sqrt{\eta} r^2 - C(n) r^4, \end{aligned} \quad (10.53)$$

где  $A(n)$ ,  $B(n)$  и  $C(n)$  — абсолютные константы, не зависящие от  $\mathcal{P}$ . Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда  $\eta(r) > r^2$  при  $r > 0$ . Выбрав в зависимости от  $N$  размер куба  $C_r(\theta, \theta)$  так, чтобы

$$\eta(r) r^6 = N^{-3}$$

из (10.53) получаем оценку

$$\begin{aligned} \forall \Pi(N), N \sup_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}_{\Pi(N)}(P_t) &\geq N \mathfrak{M}_C \mathfrak{R}_{\Pi(N)}(P_t) \geq \\ &\geq n - C(n) \eta(r(N)) - [n + B(n)] [\eta(r(N))]^{1/6}, \end{aligned} \quad (10.54)$$

что влечет (10.48), поскольку  $r(N) \rightarrow 0$ ,  $\eta(r(N)) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Для дважды дифференцируемых семейств  $\eta(r) \sim Ar$  так, что поправочный член в (10.54) имеет порядок  $N^{-1/14}$ .

Укажем теперь, как в только что доказанной теореме снять предположение, что семейство  $\mathcal{P}$  задается семейством непрерывно дифференцируемых плотностей по некоторой доминирующей мере, например, по  $P_\theta(\cdot)$ . Кроме самих мер  $P_t(\cdot)$ , рассмотрим всевозможные их сужения на конечные подалгебры  $\mathcal{A}^0$  алгебры  $\mathcal{A}$ . Поскольку по утверждению 3° леммы 10.1 вероятности всех событий  $P(A|t)$  — непрерывно дифференцируемые функции  $t$ , для  $\mathcal{A}^0$ -сужений предположение о существовании гладких плотностей выполнено. Далее, монотонные инварианты категории, такие как  $I(P: Q)$  и  $\langle P'_j(t), P'_j(t) \rangle_t$ , монотонны по сужениям и равны верхним граням своих «суженных» значений  $I(P^0: Q^0)$  и  $P_j^{0'}(t)$ ,  $P_j^{0'}(t) > t$ . Будем считать, что в окрестности точки  $t = \theta$  используется  $\theta$ -местная система координат с  $\omega_{jk}(\theta) = \delta_{jk}$ . Устроим для  $\varepsilon > 0$  столь мелкое разбиение (см. [34]), что

$$\forall j, \langle P_j^{0'}(\theta), P_j^{0'}(\theta) \rangle_\theta \geq 1 - \varepsilon n^{-1} [\chi(\theta)]^2,$$

$$\forall j \neq k, \langle P_j^{0'}(\theta) \pm P_k^{0'}(\theta), P_j^{0'}(\theta) \pm P_k^{0'}(\theta) \rangle_\theta \geq 2 - \varepsilon n^{-1} [\chi(\theta)]^2,$$