

4°. Касательные пространства в моментном представлении (10.1) в близких точках — близки, т. е. при $x, y, z \rightarrow \theta$ в некоторой малой окрестности $O_\theta \subset \Theta$ определены и сходятся интегралы

$$\forall j, \quad E_z q_j(\omega; x) \rightarrow E_\theta q_j(\omega; \theta) = 0, \quad (10.3)$$

$$\forall j, k, \quad E_z q_j(\omega; x) q_k(\omega; y) \rightarrow E_\theta q_j(\omega; \theta) q_k(\omega; \theta), \quad (10.4)$$

где $q_j(\omega; t) = (dR/dP_t)(\omega)$ — производная Радона — Никодима заряда $R(\cdot) = P_j(\cdot | t)$, совпадающая для «хороших» семейств с производной от логарифмической функции правдоподобия.

Замечание 1. Свойство семейства быть $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. сохраняется при любой его взаимно однозначной непрерывно дифференцируемой перепараметризации с якобианом, всюду отличным от нуля.

Замечание 2. Свойство семейства \mathcal{P} быть $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. наследуется при переходе к тензорным степеням \mathcal{P}^N . При этом, согласно теореме 5.2,

$$\langle P_j^{N'}(\theta), P_j^{N'}(\theta) \rangle_\theta = N \langle P_j'(\theta), P_j'(\theta) \rangle_\theta.$$

Перечислим некоторые важнейшие следствия, вытекающие из определения.

Лемма 10.1. Если $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\} = \mathcal{P} \subset \text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ есть $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство, то:

1°. Все вероятностные меры $P_t(\cdot)$ семейства \mathcal{P} взаимно абсолютно непрерывны.

2°. При каждом $\theta \in \Theta$ $\mathcal{L}^{(2)}(P_\theta)$ -нормы производных по фиксированному направлению $\zeta^j P_j'(\cdot | t)$ в окрестности θ ограничены и непрерывны в θ :

$$\forall t \rightarrow \theta, \quad \|\zeta^j P_j'(\cdot | t)\|_t \rightarrow \|\zeta^j P_j'(\cdot | \theta)\|_\theta.$$

3°. При каждом $A \in \mathcal{A}$ функция $P(A | t) = P_t(A)$ непрерывно дифференцируема всюду в Θ и либо тождественно равна нулю, либо всюду отлична от нуля. В любой выпуклой области $O \subset \Theta$, $t, \theta \in O$ справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$P(\cdot | t) = P(\cdot | \theta) + \int_0^1 (t^j - \theta^j) P_j'(\cdot | x(\xi)) d\xi,$$

где интеграл понимается как предел римановых сумм для непрерывных функций

$$(t^j - \theta^j) P_j'(A | x(\xi)), \quad x(\xi) = (1 - \xi)\theta + \xi t,$$

причем в малой окрестности θ эти суммы сходятся в $\mathcal{L}^{(2)}(P_\theta)$ -норме, а также аналогичная формула для логарифмов

$$\ln P(A | t) = \ln P(A | \theta) + \int_0^1 (t^j - \theta^j) E_{x(\xi)} \chi_A(\omega) q_j(\omega; x(\xi)) d\xi.$$