

Л е м м а 6.5. Однопараметрическое семейство $\text{Car}_2 = \text{Car}(\Omega_2, \mathcal{A}(\Omega_2)) = \{R_\theta(\cdot), 0 \leq \theta \leq 1\}$ всех распределений вероятностей (3.15) на пространстве с двумя исходами является геодезической линией ${}^1\nabla$ -связности при любом γ (с каноническим геодезическим параметром z ,

$$dz = [t(1-t)]^{\gamma-1} dt, \quad (6.47)$$

откуда z находится квадратурой). Семейство тензорных степеней $\{R_\theta^N(\cdot), 0 \leq \theta \leq 1\}$ распределений вероятностей на Ω_2^N , отвечающих схеме независимых одинаково распределенных испытаний, является геодезической линией только в экспоненциальной ${}^0\nabla$ -связности, и никакой другой (даже, если разрешить перепараметризацию).

Д о к а з а т е л ь с т в о. На отрезке Car_2 существует единственное базисное векторное поле $X_1 = X$, заданное (6.12), с правилом (6.19) переноса

$${}^1\nabla_X(X) = \gamma(1-2\theta)X, \quad X = \theta(1-\theta)d/d\theta,$$

откуда следует (6.47). Далее, в силу инвариантности ∇ -связности относительно перезворота отрезка, точка $R_{1/2} \leftrightarrow (1/2, 1/2)$ будет геодезической серединой отрезка $R_{1/4}, R_{3/4}$. С другой стороны, при $N=2$, $\Omega_2^2 = \{\omega_1'\omega_1'', \omega_1'\omega_2'', \omega_2'\omega_1'', \omega_2'\omega_2''\}$ семейство R_θ^2 описывается в тетраэдре $\{\forall i, j=1, 2 \ p_{ij} \geq 0, p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1\}$ линией вида

$$(|r_1(\theta)|^2, r_1(\theta)r_2(\theta), r_2(\theta)r_1(\theta), |r_2(\theta)|^2; 0 \leq \theta \leq 1),$$

проходящей через точки $A(1/16, 3/16, 3/16, 9/16)$, $B(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ и $C(9/16, 3/16, 3/16, 1/16)$. Рассмотрим ${}^1\nabla$ -геодезическую $\{P_t\}$, проходящую через A и C , определяемую (6.23) и (6.24). Чтобы $p_1(t) = p_4(t)$, как у точки B , необходимо взять $t = 1/2$. Нетрудно видеть, что

$$p_1\left(\frac{1}{2}\right) : p_2(1) = [(1/16)^\gamma + (9/16)^\gamma]^{1/\gamma} : [2(3/16)^\gamma]^{1/\gamma}.$$

Чтобы $p_1(1/2) = p_2(1/2)$, как у точки B , необходимо, чтобы $(1/16)^\gamma + (9/16)^\gamma = 2(3/16)^\gamma$, что дает $\gamma = 0$. Утверждение, что экспоненциальная связность наследственна относительно возведения в степень, см. теорему 7.7.

Таким образом, основной статистический интерес представляет экспоненциальная связность, в терминах которой могут естественно выражаться главные члены асимптотик в схеме независимых одинаково распределенных испытаний. Это не исключает, конечно, что поправочные члены могут столь же естественно описываться ${}^1\nabla$ -геометриями при $\gamma \neq 0$, например, $\gamma = 1/3$, $\alpha = -1/3$ или $\gamma = 2/3$, $\alpha = 1/3$ (см. [151], [141], [153]). С другой стороны, имеются интересные приложения ${}^1\nabla$ -геометрии к теории временных рядов [52] и теории информации (см. [97] и литературу в [114]). Чтобы не выходить за рамки нашего предмета,