

логарифмически выпуклая оболочка подсемейства  $\{P_t, t \in C_r\}$  является подсемейством более широкого логарифмически выпуклого компактного семейства, и  ${}^0\nabla$ -геодезическую, соединяющую  $P_x, P_y$  при  $x, y \in C_r$ , можно несколько продлить в обе стороны.

**Лемма 11.3.** Пусть  $\{P_t, t \in \Theta\}$  является 2-гладким простым семейством. Тогда в любой выпуклой подокрестности  $C \subseteq O_\theta$  параметра  $\theta \in \Theta$  для компонент тензора Фишера

$$\forall j, k, \forall x, y \in C, |\omega_{jk}(x) - \omega_{jk}(y)| \leq n\mathcal{H}_0^2[\mathcal{G}_0 + 2\mathcal{H}_0] \max |x^j - y^j|. \quad (11.10)$$

Для вывода (11.10) стандартно используется формула конечных приращений. Это неравенство позволяет получить соответствующие уточнения неравенств (10.9), (10.10), (10.13).

Как правило, гладкость семейства ухудшается с приближением к его естественному краю. Поэтому асимптотически оптимальные оценки естественно в первую очередь строить для компактных подсемейств с равномерными показателями гладкости.

**Определение 11.2.** Подсемейство  $\{P_t, t \in F\}$  простого (непрерывно)  $m$ -гладкого семейства  $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\} \subset \text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$  мы будем называть простым (непрерывно)  $m$ -гладким компактным подсемейством, когда  $F = [\text{Int } F] \subset \Theta$  — ограниченная замкнутая (т. е. компактная) подобласть в  $\Theta$ .

Кроме исходной параметризации  $t \rightarrow P_t$ , мы, как и в § 10, будем рассматривать  $\theta$ -местные аффинные перепараметризации, в которых информационная матрица Фишера  $\omega_{jk}(\theta) = \delta_{jk}$ . Чаще мы просто будем говорить о  $\theta$ -местном евклидовом расстоянии в пространстве  $\mathbb{R}^n$  исходных параметров

$$\|x - y\|_\theta^2 = (x^j - y^j)(x^k - y^k) \omega_{jk}(\theta). \quad (11.11)$$

**Лемма 11.4.** Пусть  $\mathcal{F} = \{P_t, t \in F\}$  — компактное  $m$ -гладкое подсемейство семейства  $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\}$ . Тогда существует такой компакт  $K = K(F)$

$$F \subset \text{Int } K \subset K = [\text{Int } K] \subset \Theta, \quad (11.12)$$

и такие положительные постоянные  $\lambda = \lambda(\mathcal{F})$ ,  $\rho = \rho(\mathcal{F})$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{F})$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{F})$ , что:

1°. При любых  $t, \theta \in F$  для местных расстояний

$$\forall x, y \in \Theta, \lambda^{-1} \|x - y\|_\theta \leq \|x - y\|_t \leq \lambda \|x - y\|_\theta. \quad (11.13)$$

2°. Любая  $\theta$ -местная шаровая окрестность  $S_\rho(\theta)$  точки  $\theta \in F$

$$S_\rho(\theta) = \{t: \|t - \theta\|_\theta < \rho\} \subset \text{Int } K \subset K \subset \Theta. \quad (11.14)$$