

ное отклонение $I(P:Q)$ есть универсальная характеристика «непохожести» распределения вероятностей Q на P . При близких альтернативах $I(P:Q) \sim \frac{1}{2} [s_F(P, Q)]^2$. Таким образом, количество Кульбака является своего рода несимметричным аналогом половины квадрата расстояния. Как было впервые показано нами в [32], эта аналогия заходит так далеко, что для проектирования на каноническое экспоненциальное семейство (и для двойственной задачи) выполняется несимметричный вариант теоремы Пифагора.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_s\}$ — каноническое экспоненциальное семейство распределений вероятностей и, притом, регулярное (см. ниже определение 7.2); $R(\cdot)$ — распределение вероятностей, взаимно абсолютно непрерывное с распределениями $P_s \in \mathcal{P}$. Тогда существует и единственно

$$P_\sigma = \arg \min_{\mathcal{P}} I(P_s : R), \quad (0.17)$$

где значение σ определяется через значение $\tau = t(\sigma)$ двойственного натурального статистического параметра (0.16) равенством

$$\forall j, \tau_j = \int q_j(\omega) R(d\omega). \quad (0.18)$$

Для любого распределения $P_s \in \mathcal{P}$

$$I(P_s : R) = I(P_s : P_\sigma) + I(P_\sigma : R). \quad (0.19)$$

Заметим, что если в каноническом экспоненциальном семействе (0.11), хотя бы и нерегулярном, существует распределение P_σ , для которого значение $\tau = t(\sigma)$ двойственного натурального статистического параметра задается (0.18), то несимметричное равенство Пифагора (0.19) выполнено, и справедливо (0.17).

Класс регулярных экспоненциальных семейств достаточно широк: к нему принадлежат, например, все семейства (0.11) с ограниченными направляющими статистиками $q_j(\omega)$. В общем случае можно утверждать лишь $I(P_s : R) \geq I(P_s : P_\sigma) + I(P_\sigma : R)$, если (0.17) действительно определяет $P_\sigma \in \mathcal{P}$, и т. п.

Равенство (0.19), неоднократно переоткрывавшееся и обобщавшееся, позднее (см. [49]) другими авторами, было положено нами в [34] в основу информационной теории счетно-параметрического оценивания (т. е. плотности). Двойственная задача состоит в двойственном проектировании распределения P_0 на « m »-коплоскость \mathcal{R} распределений $R(\cdot)$ с фиксированным набором τ_1, \dots, τ_m значений интегралов (0.18):

$$P = \arg \min_{\mathcal{R}} I(P_0 : R). \quad (0.20)$$

Эта задача впервые изучалась (при $m=1$) в связи с приложениями к статистической физике [23]. Она играет важную роль в теории больших отклонений, что впервые было отмечено для дискретных схем И. Н. Сановым [20] и, затем, Кульбаком [155]. Ее решение в регулярном случае дает $P = P_\sigma$, и для троек