

на—Никодима ($dQ/dP(\omega)=f(\omega)$), определенной с точностью до значений на множестве P -меры нуль и строго положительной P -почти всюду. Она задает стандартное эквивалентное представление пары (P, Q) на $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}^*)$ в виде вероятностных мер с функциями распределения F и G , $(dG/dF)(x)=x$ на луче $\{x: x>0\}=\mathbb{R}^+$:

$$F(x)=P\{\omega: f(\omega)\leq x\}, \quad G(x)=Q\{\omega: f(\omega)\leq x\}. \quad (3.4)$$

Если мера P доминирует меру Q , $P\gg Q$, а Q не доминирует P , то $f(\omega)=0$ с положительной P -вероятностью. В общем случае добавляется еще событие $\{\omega: f(\omega)=+\infty\}$, имеющее положительную Q -вероятность $1-\int_0^\infty xF(dx)$.

Л е м м а 3.3. Стандартное представление (3.4) пары $P, Q\in\text{Сар}(\Omega, \mathcal{A})$ с измеримым пространством (Ω, \mathcal{A}) лебегова или дискретного типа статистически ей эквивалентно. Для (Ω, \mathcal{A}) общего вида можно утверждать только аппроксимативную эквивалентность. Полную систему инвариантов пары (P, Q) задает функция распределения $F(x)$, где $F(\infty)<1$, если P не доминирует Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим последовательность разбиений $\Delta_n=\{A_{k,n}\}$ открытого луча $\{x: 0<x<\infty\}$, где $A_{k,n}=\{\omega: (k-1)2^{-n}<f(\omega)\leq k2^{-n}\}$, добавив к ним еще $A_{0,n}=A_0=\{\omega: f(\omega)=0\}$ и $A_{\infty,n}=A_\infty=\{\omega: f(\omega)=+\infty\}$, и сконструируем

$$Q_n(\cdot)=\sum_{k=1}^{\infty} Q(A_{k,n})P(\cdot|A_{k,n})+Q(\cdot|A_\infty), \quad (3.5)$$

выкинув из суммы неопределенные слагаемые с $P(A_{k,n})=0$. Производная $(dQ_n/dP)(\omega)=f_n(\omega)$ кусочно-постоянна, и относительно не существует настоящее кусочно-постоянное условное распределение, задаваемое $P(\cdot|A_{k,n})$ при $\omega\in A_{k,n}$. Если принять его за переходное $\Pi(\omega; \cdot)$, то $(F\Pi)\cdot=P(\cdot)$, $(G\Pi)(\cdot)=Q_n(\cdot)$. Так как $|f_n(\omega)-f(\omega)|\leq 2^{-n}$, то $d_v(Q_n, Q)\leq 2^{-n}$. Для (Ω, \mathcal{A}) дискретного или лебегова типа можно выбрать униформизуемый вариант производной Радона—Никодима $f(\omega)$, относительно которого существует настоящее условное распределение $P(\cdot|f(\omega)=x)=Q(\cdot|f(\omega)=x)$ (см. [34, § 2]). Приняв его за $\Pi(\omega; \cdot)$, получаем аналогично (3.5) $\forall A\in\mathcal{A}$.

$$(G\Pi)(A)=\int_0^\infty xP(A|f(\omega)=x)F(dx)=\int_A f(\omega)P(d\omega)=Q(A),$$

Значения функции $F(x)$ не монотонны, вообще говоря, при марковских отображениях. Поэтому мы будем использовать ва-