

(P_0, P_*, R) выполнено равенство (0.19) с $P_s = P_0, P_* = P$ (см. [34], [110]). Позднее теория двойственности была обобщена Амари [49] и разработана еще далее Лауритценом (см. [160]).

Если принять, что целью статистика в задачах параметрического оценивания является не значение θ параметра наблюдаемого распределения вероятностей P_θ , а само распределение $P_\theta(\cdot)$, и избрать величину $2I(P_\theta : P^*)$ в качестве функции потерь при оценке $P^*(\cdot)$, то (см. [34], [35], [99]), для любого гладкого семейства $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ средний по семейству \mathcal{P} (в смысле упоминавшегося выше информационного объема Фишера—Джефрейса) риск $\mathcal{R}_{\mathcal{I}(N)}$ для любого решающего правила $\mathcal{I}(N)$ оценивания по N независимым наблюдениям не может быть меньше $N^{-1} \dim \Theta + K(N)$, где величина поправки $K(N) = o(N^{-1})$ может быть грубо указана. В то же время риск $\mathcal{R}_{\Pi(N)}(P_\theta)$ оценки наибольшего правдоподобия $\Pi(N)$ для семейства \mathcal{P} при любом $\theta \in \Theta$ равен $N^{-1} \dim \Theta + o(N^{-1})$, т. е. оценка $\Pi(N)$ является асимптотически оптимальной. Эти два очень просто формулируемых результата (см. [99] и ниже § 11) являются, в сущности, квинтэссенцией стандартной теории оценок параметра.

В настоящее время наибольшее внимание привлекают приложения дифференциально-геометрических методов именно в теории оценивания параметров, в первую очередь, получение достижимых границ точности оценивания, в частности, асимптотическое уточнение поправки $K(N)$ и т. п. В этой статье мы демонстрируем, что геометрические методы могут с успехом использоваться и в других разделах статистической теории, таких как проверка гипотез и оценивание плотности, когда приходится решать задачу статистического точечного оценивания распределения вероятностей случайной величины по ее независимым наблюдениям, ср. [165].

Рассмотрение с единых позиций широкого класса типов задач позволяет отчетливее уяснить особенности естественного геометрического языка и возможности его адекватного использования. При этом приходится иметь дело с несимметричным обобщением элементарной геометрии Пифагора—Евклида в теории проверки простых гипотез, дифференциальной геометрией многообразий в двух сопряженных линейных связностях — в теории параметрического оценивания, несимметричным обобщением теории емкости и поперечников Колмогорова в задачах оценивания плотностей. Правда, в единообразной постановке мы получаем только главные члены асимптотики убывания минимального риска при естественной геометрической функции потерь.

Задача статистического точечного оценивания является, грубо говоря, обратной задачей теории вероятностей и, как обычно для нетривиальных задач математической физики, она некорректно поставлена (см. [37]—[39]). Однако она допускает