

отметим только, что геометрию  $\nabla$ -геодезических семейств распределений вероятностей на бесконечных алгебрах событий можно развивать во многом параллельно теории экспоненциальных семейств, излагаемой в следующем параграфе. Для статистических приложений оказываются существенными патологические эффекты, связанные с расходимостью нормирующих делителей (6.24) и искажающие стройную конечномерную геометрическую теорию, ср. [34]. Еще одно важное направление, возникшее недавно, связано с рассмотрением  $\nabla$ -связностей и их дуальности в терминах гильбертовых пучков, ассоциируемых с конечномерными семействами  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\} \subset \text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$  с бесконечными алгебрами  $\mathcal{A}$  (см. [52]), а также в терминах согласованных касательных гильбертовых пространств для бесконечномерных семейств, см. [34], [101]. Мы затронем эти вопросы ниже в § 9 и § 10.

## § 7. Канонические экспоненциальные семейства распределений вероятностей

Общая форма канонической записи канонического экспоненциального семейства  $\mathcal{P}$  плотностей приведена в формулах (0.11), (0.12) введения. Здесь мы рассмотрим сперва экспоненциальные семейства распределений на конечных алгебрах  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ , т. е. мультиномиальных распределений (0.4):

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad p(\omega_i; \mathbf{s}) = p(\omega_i; 0) \exp[s^j q_j(\omega) - H(\mathbf{s})], \quad (7.1)$$

$$H(\mathbf{s}) = \ln \sum_i p(\omega_i, 0) \exp[s^j q_j(\omega)], \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^m, \quad (7.2)$$

где по совпадающим нижнему и верхнему индексу  $j$  подразумевается суммирование. Очевидно, что все распределения  $P_{\mathbf{s}}$  взаимно абсолютно непрерывны. Не ограничивая общности, удобно считать, что все  $p(\omega_i; 0) > 0$ . В противном случае их удобнее рассматривать, как распределения на  $\Omega' \subset \Omega_n$ .

**Л е м м а 7.1.1<sup>0</sup>.** Через два взаимно абсолютно непрерывных распределения вероятностей  $P_0 \neq P_1$  проходит одно и только одно однопараметрическое каноническое экспоненциальное семейство  $\{P_{\mathbf{s}}\}$  с

$$\forall \omega, \quad p(\omega; \mathbf{s}) = [p_1(\omega)]^s [p_0(\omega)]^{1-s} \exp[-H(\mathbf{s})], \quad (7.3)$$

где  $s$  — канонический параметр, причем

$$\forall s: 0 \leq s \leq 1, \quad \exp[H(\mathbf{s})] \leq 1, \quad (7.4)$$

а направляющая статистика в канонической форме (7.1) записи

$$q(\omega) = \ln p_1(\omega) - \ln p_0(\omega). \quad (7.5)$$

**2<sup>0</sup>.** Любые  $m+1$  взаимно абсолютно непрерывных  $P_0, P_1, \dots, P_m$  определяют минимальное содержащее их каноническое