

Складывая правые части (6.13) для всех k , находим связь

$$0 = X_1 + \dots + X_n \leftrightarrow [p_1 e(1) + \dots + p_n e(n)] - (p_1 + \dots + p_n) p = 0 \quad (6.14)$$

этих n касательных векторов в $(n-1)$ -мерном многообразии. Однако хотя система базисных полей X_k переполнена, ее удобно использовать ввиду ее симметрии. В связи с этим дадим ее наглядное описание.

Многообразие Int Car_n удобно координатизировать системой параметров $r_k = \ln p_k$

$$\forall j, r_j = \ln p_j < 0; \exp r_1 + \dots + \exp r_n = 1; \quad (6.15)$$

соответственно вводя координаты

$$(d \ln p_1, \dots, d \ln p_n); p_1 d \ln p_1 + \dots + p_n d \ln p_n = 0; \quad (6.16)$$

в каждом слое T_p касательного многообразия. Тогда

$$\forall j, X_j f|_P = (\partial f / \partial p_j)|_P d \ln p_j - \sum_k [p_k (\partial f / \partial p_k)]_P d \ln p_k. \quad (6.17)$$

Перейдем теперь к вычислению [34] кристоффелей Γ_{ij}^k в разложениях $\nabla_{X_i}(X_j) = \Gamma_{ij}^k X_k$.

Теорема 6.1. Если ∇ есть заданная на всех открытых многообразиях Int Car_n линейная связность, инвариантная относительно категории марковских морфизмов, то в каждой точке $P \in \text{Int Car}_n$, $P \leftrightarrow (p_1, \dots, p_n)$ выполнены соотношения

$$\forall n \geq 3, \forall j \neq k, \nabla_{X_k}(X_j) = -\gamma [p_j X_k + p_k X_j], \quad (6.18)$$

$$\forall n \geq 2, \forall j, \nabla_{X_j}(X_j) = \gamma (1 - 2p_j) X_j, \quad (6.19)$$

с некоторой общей для всех объектов постоянной $\gamma \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Будем придерживаться схемы доказательства теоремы 5.2 и рассмотрим значения кристоффелей в центрах $P = P_n$ симплексов Car_n . Пусть

$$\nabla_{X_i}(X_i)|_P = a^j X_j|_P. \quad (6.20)$$

Перестановки при $n \geq 3$ остальных, кроме $e(i)$, вершин симплекса оставляют неподвижной i -ую медиану и переставляют остальные. Усредняя правые части (6.20) по всем таким перестановкам, приходим к представлению в «точке» P_n

$$\nabla_{X_i}(X_i) = a_n X_i + b_n (X_1 + \dots + X_n - X_i) = \eta_i^{(n)} X_i.$$

Переставляя вершину $e(i)$ с любой другой, убеждаемся, что коэффициент $\eta_i^{(n)}$ не зависит от i ,

$$P = P_n, \forall j, \nabla_{X_j}(X_j) = \eta^{(n)} X_j. \quad (6.21)$$