

тую область. Из необходимого и достаточного условия (9.29) вытекает, что

$$d \ln p(\omega; t) = w^{jk}(t) [q_k(\omega) - t_k] dt_j.$$

Интегрируя этот полный дифференциал вдоль любого кусочно-гладкого пути $l(t)$, соединяющего t с фиксированной точкой θ , где P_θ обладает минимальным по числу атомов нуль-множеством, находим

$$\ln p(\omega; t) = \ln p(\omega; \theta) + s^k q_k(\omega) - H(t),$$

где (ср. (9.24))

$$s^k = \int w^{jk}(t) dt_j, \quad H(t) = \int t_k w^{jk}(t) dt_j.$$

По линейной независимости статистик $1(\omega), q_1(\omega), \dots, q_m(\omega)$ коэффициенты такого представления, имеющего вид (7.1), единственны, и, значит, не зависят от пути интегрирования.

Проанализируем теперь обстоятельства, препятствующие непосредственному перенесению доказательства теоремы 9.2 на случай произвольного измеримого пространства (Ω, \mathcal{A}) . Пусть имеется однопараметрическое семейство \mathcal{P} вероятностных мер P_t . Естественно сказать, что семейство слабо дифференцируемо при $t=\theta$, если для всех $A \in \mathcal{A}$ дифференцируемы функции $P_t(A)$. Семейство этих производных $\{P'_\theta(A), A \in \mathcal{A}\}$ задает на \mathcal{A} конечно аддитивный заряд $R(\cdot)$, доминируемый в силу леммы 9.1 мерой P_θ , и с полным зарядом $R(\Omega)=0$. Пусть статистика $f(\omega)$ имеет среднее $m(t)$ по каждой мере P_t (что бывает отнюдь не всегда, но что разумно предположить в условиях теоремы). При сделанных минимальных предположениях функция $m(t)$ уже не обязана быть дифференцируемой, а если она и дифференцируема при $t=\theta$, то эта производная может отличаться от интеграла Лебега (понимаемого как предел интегральных сумм) статистики $f(\omega)$ по заряду $R(d\omega)$. Конечно, если ввести все вышесказанное в формулировку теоремы в качестве дополнительных предположений, то доказательство сохранит свою силу. Однако ценность такого утверждения будет невысокой. Неравенство (9.18) ограничивает снизу точность любой несмещенной оценки, а так обобщенный вариант его — только «хороших». Для наших целей такой путь (см. [149]) не годится. Самый простой выход состоит в следующем [34]. Свяжем с $P_\theta = P$ местное скалярное произведение для аддитивных функций множества на \mathcal{A}

$$\|R\|_P^2 = \langle R, R \rangle_P = \int_\Omega [R(d\omega)]^2 P^{-1}(d\omega), \quad (9.33)$$

где скалярный квадрат понимается как монотонный предел интегральных сумм, с правилом $0^2/0=0$ раскрытия неопределенностей.