

только в их терминах. А позже мы покажем, как можно освободиться от указанного дополнительного требования.

Определение 10.4. Пусть $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\} \in \mathcal{L}^{(2)}$ - н. д. семейство распределений вероятностей, заданное семейством непрерывно дифференцируемых по t плотностей, взятых по некоторой доминирующей мере $\mu(\cdot)$, и пусть \mathcal{C} — его подсемейство, отвечающее компактному подмножеству $C \subset \Theta$ значений параметра. Для любой вероятностной борелевской меры $\alpha(\cdot)$ на C назовем *взвешенным* (с весовой мерой α) *средним геодезическим* распределений семейства \mathcal{C} распределение вероятностей $\Phi_\alpha(\cdot)$ на (Ω, \mathcal{A}) с логарифмом плотности

$$\ln \Phi_\alpha(\omega) = \int_C \ln p(\omega; t) \alpha(dt) - H[\alpha] = \ln f_\alpha(\omega) - H[\alpha], \quad (10.33)$$

где $H[\alpha]$ — логарифм нормирующего делителя (ср. 4.7)),

$$\exp H[\alpha] = \int_\Omega \exp \left[\int_C \ln p(\omega; t) \alpha(dt) \right] \mu(d\omega), \quad (10.34)$$

Чтобы это определение было корректно, надо чтобы нормирующий делитель (10.34) был отличен от $+\infty$ и от 0. Покажем, что первая опасность реализоваться (когда $\alpha(\cdot)$ — вероятностная мера), вообще, не может, и $H[\alpha] \leq 1$. Так как плотность предположена непрерывной, то она измерима $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^*$ как функция аргумента (ω, t) на $\Omega \times C$, равно как и ее производные по t . Поэтому, используя теорему Фубини и вогнутость логарифма

$$\begin{aligned} 0 = \ln 1 &= \ln \int_C \int_\Omega p(\omega; t) \alpha(dt) \mu(d\omega) \geq \\ &\geq \ln \int_\Omega \exp \left[\int_C \ln p(\omega; t) \alpha(dt) \right] \mu(d\omega) = H[\alpha]. \end{aligned}$$

Достаточным условием сходимости внутреннего интеграла в (10.34) будет условие строгой положительности $p(\omega; t)$ и, тем самым, отделимости ее на компакте C от нуля. Мы воспользуемся иным соображением, см. [34, § 19].

Лемма 10.9. Если существует такое распределение вероятностей $R(\cdot)$ на (Ω, \mathcal{A}) , что $\sup_C I(P_t : R) < \infty$, то

$$\int_C I(P_t : R) \alpha(dt) \geq -H[\alpha]. \quad (10.35)$$

Следствие. Если компакт C есть куб $C_r(z, \theta) \subset S_{\sqrt{nh}}(\theta)$ (см. (10.30) — (10.32)), то

$$0 \leq -H[\alpha] \leq \frac{1}{2}(1 + \eta)nr^2. \quad (10.36)$$