

литическими функциями s . Поэтому в пространстве параметров (s^1, \dots, s^m) существует выпуклое множество $G = \text{Dom } \mathcal{P}$, на котором $H(s)$ конечно, и вне которого — бесконечно. При этом в открытом выпуклом множестве $\text{Int } G$ все зависимости аналитичны. Когда $\mu = \dim G < m$, надо произвести перепараметризацию, выбрав μ первых координатных осей в линейной оболочке $\text{Lin } G$ и отбросив остальные, как не отвечающие реальности. Далее надо произвести, как и в конечном случае, проверку на линейную независимость исправленных направляющих статистик и, если нужно, отбросить лишние. В результате мы придем к канонической карте семейства \mathcal{P} , в которой соответствие $s \rightarrow P_s$ взаимно однозначно. Лемма 7.2 сохраняется в следующей форме.

Лемма 7.2'. Логарифм нормирующего делителя $H(s)$ в (0.12) является непрерывной снизу выпуклой функцией на \mathbb{R}^m , принимающей бесконечные значения вне $G = \text{Dom } \mathcal{P}$, причем строго выпуклой в $\text{Int } G$, если направляющие статистики линейно независимы. Функция $H(s)$ аналитична в трубчатой области $\text{Re } s \in \text{Int } G$.

Определение двойственной параметризации $t = t(s)$ и ее свойства сохраняются при всех $s \in \text{Int } G$. Может случиться, что на границе параметр t может стать «бесконечным», см. ниже пример 5. Однако, вектор-функция $t(s)$ является максимальным продолжением векторного поля $\text{grad } H(s)$ на $\text{Int } G$, см. (7.14). Поэтому удобно ввести еще одно выпуклое множество G_1 тех значений $s \in G$, при которых определение (0.16) дает конечное значение вектора $t(s)$, $\text{Int } G \subseteq G_1 \subseteq G$. На G_1 соответствие между канонической и статистической параметризациями является в обе стороны однозначным и монотонным, в том смысле, что для любых двух значений $s, \sigma \in G_1$, $t = t(s)$, $\tau = t(\sigma)$ свертка

$$(s^j - \sigma^j) (t_j - \tau_j) \geq 0. \quad (7.16)$$

Таким образом, переход от точной канонической параметризации экспоненциального семейства порождается преобразованием Лежандра выпуклой функции $H(s)$. Отсюда, в частности, вытекает биортогональность этих двух координатизаций, ср. [186].

Теорема 7.3. Для точной канонической карты семейства \mathcal{P} и двойственной по (0.16) статистической параметризации в каждой точке

$$P = P_s \in \mathcal{P}, \quad s \in \text{Int } G, \quad t = t(s),$$

$$E_P [\partial \ln p(\omega; t) / \partial t_j] [\partial \ln p(\omega; s) / \partial s^k] = \delta_{jk}^j, \quad (7.17)$$

$$(\partial t_k / \partial s^j) = E_P [\partial \ln p(\omega; s) / \partial s^j] [\partial \ln p(\omega; s) / \partial s^k] = v_{jk}(s), \quad (7.18)$$

$$(\partial s^j / \partial t_k) = E_P [\partial \ln p(\omega; t) / \partial t_j] [\partial \ln p(\omega; t) / \partial t_k] = w^{jk}(t). \quad (7.19)$$

Таким образом, $V = (v_{jk}(s))$ есть фишеровская матрица информации для канонической параметризации, а $W = (w^{jk}(t))$ — для