

$\sigma$  — длина дуги Бахттачария на карте  $\Sigma^{(1/2)}$ , в естественной римановой метрике Фишера.

Мы воспользуемся возможностью (10.16) геометризовать неравенство информации, чтобы установить его интегральное (байесовское) следствие. Дело в том, что (9.18) не запрещает в явной форме существование очень хороших смещенных оценок  $\tau(\omega)$  параметра  $t$  при той же квадратичной функции потерь  $(\tau^j - t^j)(\tau^k - t^k)\omega_{jk}(t)$ . Не запрещает его прямо и (10.14), поскольку в его правую часть входит производная  $m'(t)$ ; заведомо могущая в отдельных точках обращаться в нуль. Более того, известный пример Стейна показал существование смещенных всюду суперэффективных оценок, даже у параметра сдвига семейства трехмерных нормальных распределений с постоянной матрицей ковариаций. Оказывается, однако, что в «среднем» эта выгода невелика, и влияние суперэффективности падает с ростом числа независимых испытаний со статистической моделью  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , ср. [133], [138].

Для многопараметрических семейств не существует, вообще говоря, геодезической системы координат, при которой тензор  $\omega_{jk}(\theta)$  во всех точках  $\theta \in \Theta$  превратился бы в единичный. Зато его по следствию из леммы 10.2 можно сделать почти единичным в достаточно малой окрестности  $\theta$ , используя всего лишь аффинную замену координат.

Определение 10.2. Любую систему координат, которая получается из исходной аффинной заменой  $t^* = At + t_0$  и в которой тензор  $\omega_{jk}^*(\theta) = \delta_{jk}$ , мы будем называть  $\theta$ -местной.

Соответственно, условимся называть шаром или  $\theta$ -местным шаром радиуса  $r$  эллипсоид

$$S_r(\theta) = \{x : (x^j - \theta^j)(x^k - \theta^k)\omega_{jk}(\theta) \leq r^2\} \quad (10.17)$$

пространства  $R^n$  исходной системы параметров семейства, который в любой  $\theta$ -местной системе координат является шаром  $\{x^* : (x^{*1})^2 + \dots + (x^{*n})^2 \leq r^2\}$ . Аналогично, кубом  $C_r(t, \theta)$  будем называть множество в пространстве исходных параметров, которое в какой-либо  $\theta$ -местной системе координат описывается набором ограничений:

$$C_r(z, \theta) = \{x^* : |x^{*j} - z^{*j}| \leq r, j = 1, \dots, n\}. \quad (10.18)$$

Теорема 10.5. Пусть  $\mathcal{P} = \{P_t(\cdot), t \in \Theta \subset R^n\}$  есть  $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство,  $\theta \in \Theta$ , и параметризация  $t \rightarrow P_t$  является  $\theta$ -местной. Пусть местный куб  $C_r(z, \theta)$  целиком лежит в окрестности  $O_{\theta\eta}$  леммы 10.2. Тогда для среднего по кубу  $C_r(z, \theta)$  риска любой оценки  $\tau(\omega^1, \dots, \omega^N)$  по  $N$  независимым наблюдениям  $(\omega^1, \dots, \omega^N) = \varepsilon$  с вероятностью исходов  $P_t^N(d\varepsilon)$  при функции потерь

$$L(\tau; t) = \|\tau - t\|_{\theta}^2 = (\tau^1 - t^1)^2 + \dots + (\tau^n - t^n)^2$$