

Заметим, что запись (5.8) не может быть однозначной, так как система координат переопределена ввиду $p_1 + \dots + p_n = 1$ (см. 0.4)) и

$$dp_1 + \dots + dp_n = 0. \quad (5.9)$$

Предположим теперь, что форма с тензором $g^{ij}(P)$ валентности ноль—два инвариантна, и рассмотрим ее значение в центре $P_n \leftrightarrow (n^{-1}, \dots, n^{-1})$ симплекса (0.4). Так как наложение симплекса на себя, сводящееся к перенумерации вершин, есть обратимое марковское отображение, то все формы, получающиеся из $g^{ij}(P_n) dp_i dp_j$ перенумерацией, совпадают с исходной, а также с их усреднением, которое имеет вид

$$\begin{aligned} C_1(n) \sum_i (dp_i)^2 + C_2(n) \sum_{i \neq j} dp_i dp_j = \\ = C(n) \sum (dp_i)^2 + C_3(n) \left(\sum dp_i \right)^2 = C(n) \sum (dp_i)^2, \end{aligned}$$

ввиду (5.9). Чтобы сравнить константы $C(n)$ при разных n , рассмотрим эквивалентное марковское вложение симплекса Car_n в Car_m , марковски обратимое на образе,

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n; \quad \forall k = 1, \dots, v, \quad q_{k+i(v-1)} = p_i v^{-1}; \\ p_i = q_{1+(i-1)v} + \dots + q_{iv}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

с аналогичными правилами отображения дифференциалов. Так как правила (5.10) устанавливают соответствие P_n и P_{nv} , эквивалентное на окрестности P_n , то значение формы при этом не должно изменяться, откуда $C(n) = v^{-1} C(nv)$, $C(nv) = v C(n) = n C(v)$. Окончательно

$$C(n) = n C. \quad (5.11)$$

Далее, симплекс $\text{Car}(\Omega, \mathcal{A}_n)$ может быть так эквивалентно вложен в симплекс $\text{Car}(\Omega, \mathcal{A}_m)$, $m \geq n$, что его некоторое строго положительное арифметическое распределение (5.6) перейдет в центр P_m . Это вложение задается правилами типа (5.10) с уже неравными группами объемов $v_1 = k_1 \geq 1, \dots, v_m = k_m \geq 1$. Опять-таки, при таком отображении значение инвариантной формы не должно изменяться. Подсчет дает

$$\forall i \neq j, \quad g^{ij}(P) = 0; \quad \forall i, \quad g^{ii}(P) = C m / k_i = C / p_i, \quad (5.12)$$

что и требовалось. Так как арифметические распределения всюду плотны в Int Car_n , то на остальных $P \in \text{Int Car}_n$ поле тензоров определяется по непрерывности. Разумеется, это будет лишь одно из представлений; к нему можно добавить квадрат суммы (5.9) с любым весом. Форма определяет риманову метрику на симплексах Car_n , включая их грани. Ввиду доказанной марковской монотонности, содержащей монотонность по фильтру разбиений, переход к произвольным измеримым пространствам (Ω, \mathcal{A}) тривиален.