

случайной величины $q(\omega) = \ln p_1(\omega) - \ln p_0(\omega)$ при распределении $P_\sigma(d\omega)$ исходов, в том числе дисперсию

$$\text{Var}_\sigma q(\omega) = E_\sigma [\ln p_1(\omega) - \ln p_0(\omega)]^2, \quad (4.17)$$

и хорошую сходимостъ к нормальному закону $\mathcal{N}(0, \sqrt{D_\sigma})$ распределения усредненной логарифмической функции правдоподобия $f_N(\varepsilon)$. Сформулируем теперь основной результат Салихова [19] об оптимальном минимаксном тестировании трех простых гипотез, где приходится принимать решения $\delta = \delta_j : P = P_j, j = 1, 2, 3$. В этой ситуации существует шесть видов ошибок — принять $\delta_k : P = P_k$, когда наблюдается P_j с $j \neq k$. Вероятность каждой такой ошибки мы обозначим $\alpha^{(j, k)}$.

Теорема 4.3. Пусть распределения вероятностей P_1, P_2, P_3 попарно взаимно абсолютно непрерывны. Тогда максимум вероятности ошибки у оптимального теста убывает как $\exp[-N \min_{j \neq k} J(P_j, P_k)]$, точнее

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\Pi(N)} N^{-1} \ln \max_{j \neq k} \alpha_N^{(j, k)}(\Pi) = -\min_{j \neq k} J(P_j, P_k). \quad (4.18)$$

Этот нижний предел достигается на последовательности правил наибольшего правдоподобия $\delta = \delta_k$, если $p_k(\omega^1) \cdot \dots \cdot p_k(\omega^N) = \max_i p_i(\omega^1) \cdot \dots \cdot p_i(\omega^N)$, где $p_i(\omega) = (dP_i/d\mu)(\omega)$ при любой доминирующей мере μ .

Таким образом, в этой ситуации гарантируемое качество решения лимитируется наиболее трудно распознаваемой парой. Добавим, что в формулировке теоремы не предполагается, что «треугольник» $P_1 P_2 P_3$ не вырожден; они все могут принадлежать однопараметрическому каноническому экспоненциальному семейству. Геометрическая интерпретация позволяет довольно легко обобщить технику доказательства теоремы 4.2. За деталями отсылаем к оригинальной работе [19].

Сходным образом может быть рассмотрена задача тестирования гипотез или сложных гипотез (если, конечно, последние не слишком сложны). Одной из важных статистических задач является тестирование простой гипотезы $P = P_0$ против сближающейся простой $P = P_{\theta(N)}$, $\theta(N) \rightarrow 0$, или сложной альтернативы $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta - \Theta(N)\}$, где $\{\Theta(N)\}$ — последовательность стягивающих в точку $\theta = 0$ ее окрестностей, $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ — гладкое семейство. Такие задачи близки к задачам параметрического оценивания и могут использовать разработанный для последней естественный геометрический язык. Недавно Пикар показала [177], [176], что фишера информация и связности Ченцова — Амари определяют в асимптотическом разложении мощности теста отношения правдоподобия против простой локальной альтернативы $\theta(N) = N^{-1/2}$ вплоть до членов второго порядка.

Изложенные в этом параграфе результаты заставляют снова вернуться к вопросу: какие геометрические понятия несут содер-