

Лемма 9.6. Всякая аддитивная функция $R(\cdot)$ на (Ω, \mathcal{A}) с конечной нормой (9.33), является счетно-аддитивным зарядом ограниченной вариации, доминируемым вероятностной мерой P . Для распределений вероятностей $R(\cdot) = Q(\cdot)$ интеграл (9.33) сводится к информационной энергии (8.27), а для разностей $R = Q - P$ — к дивергенции Кагана $2D_3(P, Q)$ [5].

Определение 9.2. Будем называть семейство $\{P_t, t \in \Theta\}$ $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемым при $t = \theta$, если существуют такие заряды $R_j(\cdot) = P_j'(\cdot | t) |_{t=\theta}$ конечной местной нормы $\mathcal{L}^{(2)}(P_\theta)$ (см. 9.33), что в некоторой окрестности $O_\theta \ni \theta$, $O_\theta \subseteq \Theta$.

$$\|P_{t=\theta}(\cdot) - P_\theta(\cdot) - (t^j - \theta^j)R_j(\cdot)\|_\theta = o(\|t - \theta\|). \quad (9.34)$$

Замечание 1. Формально мы не включаем в определение требования $\forall t \in O_\theta, P_t \ll P_\theta$. Оно вытекает из условия (9.34), так как $\|(t^j - \theta^j)R_j\|_\theta < \infty$, $\|P_\theta\|_\theta = 1$.

Замечание 2. Если семейство $\{P_t, t \in \Theta\}$ $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемо при $t = \theta$, то таково же семейство $\{P_t^N, t \in \Theta\}$, причем

$$\langle P_j^{N'}(\cdot | \theta), P_k^{N'}(\cdot | \theta) \rangle_\theta = N \langle P_j'(\cdot | \theta), P_k'(\cdot | \theta) \rangle_\theta.$$

Теорема 9.7. Пусть семейство $\{P_t, \theta' < t < \theta''\}$ $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемо при $t = \theta$. Тогда для любой статистики $f(\omega)$ выполнена дилемма: либо $E_\theta[f(\omega) - \theta]^2 = +\infty$, либо среднее $m(t) = E_t f(\omega)$ существует в окрестности θ , дифференцируемо по t при $t = \theta$, и для производной справедливо неравенство (9.11)

$$\forall c \in \mathbb{R}, |m'(\theta)|^2 \leq I(\theta) \cdot E_\theta[f(\omega) - c]^2.$$

Замечание. Если $I(\theta) = \|P_\theta'\|_\theta^2 = 0$ и $E_\theta[f(\omega)]^2 < \infty$, то $m'(\theta) = 0$, и неравенство (9.11) не накладывает ограничений на $\text{Var}_\theta f(\omega)$.

Аналогичная дилемма справедлива и для любых рандомизированных правил оценивания параметра t , см. замечание 1 к теореме 9.2. Утверждение (9.18) следствия из теоремы 9.2 для несмещенных оценок $\hat{f}(\omega)$

$$\text{Var}_\theta \hat{f}(\omega) \geq [I(\theta)]^{-1}$$

выполняется без каких либо оговорок. Необходимое и достаточное условие превращения (9.18) в равенство трансформируется в условие для плотностей

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Omega' : P_\theta(\Omega') &= 1; \forall \omega \in \Omega', q(\omega) - \theta = \\ &= [I(\theta)]^{-1} (dP_\theta' / dP_\theta)(\omega). \end{aligned} \quad (9.35)$$

В теореме 9.7 не предполагается, что семейство вероятностных мер P_t задано дифференцируемым при $t = \theta$ семейством плотностей $p(\omega; t)$ по какой-либо доминирующей мере. Тем не менее, из (9.35) удастся (см. [34], ср. также [197]) вывести аналог теоремы 9.3 в следующей форме.