

экспоненциальных семейств множество C^1 может быть невыпукло.

Пример 6. Семейство распределений вероятностей на множестве $Z^0 = Z - \{0\}$ всех целых чисел, кроме нуля,

$$p_k = [B_m(s, \sigma)]^{-1} |k|^{-m} \exp[s|k| + \sigma \chi_N(k)], \quad k \neq 0, \quad (7.31)$$

где функция $\chi_N(k)$ определена на Z^0 как

$$\chi_N(N) = 1, \quad \chi_N(-N) = -1; \quad \chi_N(k) = 0, \quad \forall k: |k| \neq N.$$

При показателе $m > 2$ и $N > \zeta(m-1)/\zeta(m)$ множество $C^1 = T(G_1)$ невыпукло, причем $G_1 = G$. В самом деле, G есть полуплоскость

$$\{(s, \sigma) : (\infty < s \leq 0, \quad -\infty < \sigma < +\infty),$$

в которой сходится ряд как для нормирующего делителя, так и для его частных производных. На луче $\{(s, \sigma) : -\infty < s \leq 0, \sigma = 0\}$ значение $T_1(s, 0) = t$ монотонно возрастает до значения $t(0, 0) = \theta_m = \zeta(m-1)/\zeta(m)$, в то время как $\tau = T_2(s, 0) = 0$ тождественно. С другой стороны, $\tau(0, \sigma) = -\tau(0, -\sigma)$, а $t(0, \sigma) = t(0, -\sigma) \rightarrow N$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Поэтому при достаточно большом σ середина отрезка с концами $T(0, \pm\sigma)$ лежит вне луча $\{(t, \tau) : t \leq \theta_m, \tau = 0\}$.

Впрочем, обойти парадоксы примеров 5 и 6, и восстановить гармонию в теории можно, допустив иногда, что на ∂G вектор-функция $T(s)$ становится многозначной и может в каждой граничной точке принимать континуум значений.

Определение 7.3. Назовем для краткости F -усечением произвольного распределения вероятностей P с идеалом \mathcal{Z} нуль-множеств, $F \in \mathcal{Z}$, условное распределение вероятностей $P^F(\cdot)$:

$$P^F(A) = P(A|F) = P(A \cap F) / P(F). \quad (7.32)$$

Для каждого F операция F -усечения задает дробно-линейный гомоморфизм многообразия $\text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$ на $\text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z}_F)$, $\mathcal{Z}_F \supset \mathcal{Z}$.

Следующее свойство является характеристическим для канонических экспоненциальных семейств, см. [34].

Теорема 7.6. F -усечения $P_s^F(\cdot)$ вероятностных мер $P_s(\cdot)$ канонического экспонентного семейства $\mathcal{P} \subset \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$ с плотностями (0.11) задаются относительно той же доминирующей меры $\mu(\cdot)$ на (Ω, \mathcal{A}) плотностями

$$p^F(\omega; s) = p^F(\omega; 0) \chi_F(\omega) \exp[s^j q_j(\omega) - H(s) - \ln P_s(F)] \quad (7.33)$$

и образуют выпуклое подсемейство канонического экспоненциального семейства $\mathcal{P}^F \subset \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z}_F)$ с той же канонической параметризацией s и плотностями

$$p^F(\omega; s) = p^F(\omega; 0) \chi_F(\omega) \exp[s^j q_j(\omega) - H_F(s)] \quad (7.34)$$

по мере $\mu(\cdot)$. При этом $G \subseteq G^F$, $C \supseteq C^F$, а нормирующие делите-