

двойственной статистической, и

$$V = W^{-1}. \quad (7.20)$$

Особенно красивы формулы для перехода, когда $t=t(s)$ — стандартная в смысле (0.14) двойственная параметризация, $t(0)=0$, и нормирующий делитель совпадает с информацией Кульбака.

Теорема 7.4. Если статистическая параметризация t стандартно двойственна точной канонической параметризации s , то переход T в G_1 от переменных s^1, \dots, s^m и выпуклой функции $H(s) = I(P : P_0)$ к переменным t_1, \dots, t_m и функции $I(P_0 : P)$, $P = P_s = P_{s(t)}$, является преобразованием Лежандра:

$$s^k t_k = I(P : P_0) + I(P_0 : P), \quad (7.21)$$

$$t_k = (\partial / \partial s_k) I(P_s : P_0), \quad (7.22)$$

$$s^k = (\partial / \partial t_k) I(P_0 : P_s). \quad (7.23)$$

Если $s \in G$, $s \neq \sigma \in G_1$, $\tau = T(\sigma)$, то выполнено *неравенство Юнга*

$$s^k \tau_k < I(P_s : P_0) + I(P_0 : P_s). \quad (7.24)$$

Для произвольных двух распределений P_s, P_σ , $s, \sigma \in G_1$, $t = T(s)$, $\tau = T(\sigma)$, свертка

$$(s^k - \sigma^k)(t_k - \tau_k) = I(P_s : P_\sigma) + I(P_\sigma : P_s). \quad (7.25)$$

Необходимо подчеркнуть, что функция $I(P_0 : P_{s(t)}) = K(t)$, как сопряженная по Лежандру к строго выпуклой функции $H(s)$, сама является строго выпуклой в любой выпуклой подобласти своего определения. Однако, как показывает пример 6, область ее определения может оказаться невыпуклой.

Направляющая вектор-статистика $q(\omega)$ семейства задает отображение $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Так как она — достаточная статистика для $\{P_s\}$, то, по инвариантности связности, семейство *редукций* $R_s = P_s q^{-1}(\cdot)$ на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^{m*})$ само является экспоненциальным семейством, конгруэнтным исходному, с семейством плотностей по мере $\mu q^{-1} = \mu^0$:

$$r^0(y, s) = r^0(y, 0) \exp[s^j y_j = H(s)] \quad (7.26)$$

с теми же каноническими координатами s и тем же нормирующим делителем $\exp H(s)$. Таким образом, определяемые аналитической функцией $H(s)$ свойства исходного семейства \mathcal{P} можно изучать на его редукции \mathcal{R} . Параметризацию s будем считать фиксированной.

Мера μ^0 и доминируемые ею взаимно абсолютно непрерывные меры R_s на \mathbb{R}^m могут быть дискретными, могут быть абсолютно непрерывными относительно лебегова объема, могут быть сингулярными, в том числе сосредоточенными на линии, поверхности и т. п. Например, у двухпараметрического семейства нор-