

Доказательство вытекает из равенства

$$I(\Phi_\alpha:R) = H[\alpha] + \int_C I(P_t:R) \alpha(dt), \quad (10.37)$$

справедливого, во всяком случае, для сужений всех распределений вероятностей на конечную подалгебру $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ и последующего монотонного перехода к пределу. Далее, из неравенств (10.10) и (10.13) вытекает, что

$$I(P_t:R_\theta) \leq \frac{1}{2} (1 + \eta) \sup_{t \in C} (t^j - \theta^j) (t^k - \theta^k) \omega_{jk}(\theta),$$

что дает правую часть (10.36) ввиду $\omega_{jk}(\theta) = \delta_{jk}$.

Л е м м а 10.10. Совокупность $\mathfrak{S}(\mathcal{S})$ всех взвешенных средних геодезических (если она существует) ${}^0\nabla$ -геодезически выпукла, слабо компактна и содержит исходное подсемейство $\mathfrak{S} = \{P_t, t \in C\}$, образуя его *логарифмическую выпуклую оболочку*. Полунепрерывная снизу функция $I(\Phi:R)$ от Φ достигает на ней своего \mathfrak{S} -минимума, при $\inf_{\mathfrak{S}} I(\Phi:R) < \infty$, — единственно. Если $Q = \Phi_\alpha = \arg \min_{\mathfrak{S}} I(\Phi:R)$, то

$$\forall \Phi_\beta \in \mathfrak{S}, \quad I(\Phi_\beta:R) \geq I(\Phi_\beta:Q) + I(Q:R). \quad (10.38)$$

З а м е ч а н и е. Этому единственному распределению вероятностей Q может отвечать много представлений Φ_α .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Логарифмическая выпуклость \mathfrak{S} очевидна, а неравенство (10.38) теоремы косинусов вытекает из теоремы (8.8), примененной к каноническому экспоненциальному семейству, соединяющему Q и Φ_β .

Таким образом, по одной оценке P^* мы построили (измеримым образом) другую оценку $\pi(P^*) = Q^* \in \mathfrak{S}$, приводящую на подсемействе $\mathcal{S} \subset \mathfrak{S}$ к меньшим потерям. При этом, $\pi(P_t) = P_t$, $\forall t \in C$. Аккуратности ради можно добавить, что когда $\inf I(\Phi_\alpha:R) = +\infty$, можно полагать $\pi(R) = P_\theta$.

Перейдем теперь к построению эффективного проектирования из $\mathfrak{S}(\mathcal{P}_r)$ на $\{P_t, t \in S_{2n\sqrt{n}h}(\theta)\}$, считая, что $\eta < 1$. С каждым $\Phi_\alpha \in \mathfrak{S}(\mathcal{P}_r(z, \theta))$ свяжем два значения параметра $t \in R^n$:

$$T[\alpha] = \int_C t \alpha(dt) \in C, \quad (10.39)$$

$Y[\alpha]: Y^j = z^j + E_z [\ln \Phi_\alpha(\omega) - \ln p(\omega; z)] v^{jk}(\theta) q_k(\omega; z)$, (10.40) где $v = (v^{jk})$ — обратная к матрице информации W . Когда $Y[\alpha] \in \Theta$, будем говорить, что $P_{Y[\alpha]}$ *сопутствует* взвешенному среднему Φ_α . Основное различие между $T[\alpha]$ и $Y[\alpha]$ состоит в том, что $T[\alpha]$ зависит от меры $\alpha(\cdot)$, участвующей в представлении (10.39), а $Y[\alpha]$ определен через плотность распределения, и от вариантов задания $\Phi(\omega)$ не зависит. Поэтому, именно сопутствующий закон, как $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ — измеримый образ, должен определять *квазипроекцию*.