

Следствие. В условиях леммы для любого фиксированного детерминированного правила оценивания $\hat{P}(N) : (\omega^1, \dots, \omega^N) \rightarrow P_\alpha$ найдется такое распределение $P = P_\alpha \in \mathcal{P}_\rho$, что

$$\mathbf{E}_a^{(N)} \|p(\cdot | \alpha^*) - p(\cdot | a)\|^2 \geq \frac{1}{4} \min\{\rho^2, C^{-1}nN^{-1}\}. \quad (12.29)$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться для \mathcal{P}_ρ одномерными неравенствами информации (9.11), надо убедиться, ввиду линейности задания (12.27), лишь в ограниченности $\mathcal{L}^{(2)}(P)$ норм частных производных

$$\frac{\partial}{\partial a_k} p(\omega | a) = \varphi_k(\omega) = \frac{p_0(\omega) + \rho \varphi_k(\omega) - p_0(\omega)}{\rho}.$$

Из априорного условия (12.25)

$$\begin{aligned} \langle P'_j, P'_j \rangle_P &= \int_{\Omega} \left[\frac{\varphi_j(\omega)}{p(\omega)} \right]^2 p(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \frac{[\varphi_j(\omega)]^2}{p(\omega)r(\omega)} r(\omega) \mu(d\omega) \leq \\ &\leq C \int_{\Omega} |\varphi_j(\omega)|^2 r(\omega) \mu(d\omega) = C. \end{aligned}$$

Тогда и семейство \mathcal{P}^N степеней P^N также $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемой, причем

$$\langle P_j^{N'}(a), P_j^{N'}(a) \rangle_a = N \langle P'_j(a), P'_j(a) \rangle_a \leq NC,$$

см. замечание 2 к определению 9.2. У ограниченной вектор-статистики $\alpha^*(\omega^1, \dots, \omega^N)$ и математическое ожидание, и дисперсия существуют и являются полиномами от коэффициентов a_j . Поэтому к каждой компоненте α_k^* приложимо одномерное неравенство информации (9.11), которое дает при $c = \mathbf{E}_a^{(N)} \alpha_k^{*}$

$$\mathbf{E}_a^{(N)} [\alpha_k^* - a_k]^2 \geq [\mathbf{E}_a^{(N)} \alpha_k^* - a_k]^2 + C^{-1}N^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial a_k} \mathbf{E}_a^{(N)} \alpha_k^* \right]^2. \quad (12.30)$$

Суммируя все эти неравенства по $k=1, \dots, n$, и замечая, что

$$n \sum_1^n \left[\frac{\partial w^j}{\partial z^j} \right]^2 \geq \left[\sum_1^n \frac{\partial w^j}{\partial z^j} \right]^2 = [\operatorname{div}_z w]^2, \quad (12.31)$$

получаем (12.28), ср. формулы (25.36) и (28.15) в [34]. Наконец, (12.29) вытекает из альтернативы: если $w(z)$ — непрерывно дифференцируемое отображение n -мерного шара V радиуса ρ в объемлющее евклидово пространство, то либо на поверхности S этого шара

$$\sup_S |w(z) - z| \geq \beta \rho, \quad (12.32)$$

либо в шаре V найдется точка $z = \xi$, в которой

$$n^{-1} \operatorname{div}_z w(z) |_{z=\xi} \geq 1 - \beta, \quad (12.33)$$

см. лемму 25.10 в [34].

Теперь мы в состоянии установить при условии (12.25) оп-