

тимальность проекционных оценок по порядку убывания квадрата нормы погрешности.

Теорема 12.4. 1°. Если плотности распределений семейства \mathcal{P} удовлетворяют правому неравенству (12.25) и n -мерные поперечники тела \mathcal{P} в метрике $\mathcal{L}^2(r)$ удовлетворяют неравенству

$$[d_n(\mathcal{P})]^2 \leq B \cdot g(An),$$

то можно выбрать такую последовательность подпространств $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{L}^2(r)$ и такую зависимость $n = v(N)$, что для соответствующей проекционной оценки $\pi^* = \pi_{v(N), N}^*(\cdot)$

$$\sup_{\mathcal{P}} E_P^{(N)} \|\pi^*(\cdot) - p_P(\cdot)\|^2 \leq K N^{-1} \cdot \Gamma(N),$$

где K — некоторая константа, $v(N) \asymp \Gamma(N)$.

2°. Если плотности распределений семейства \mathcal{P} удовлетворяют левому неравенству (12.25) и n -мерные внутренние радиусы тела \mathcal{P} в метрике $\mathcal{L}^2(r)$ удовлетворяют неравенству

$$b \cdot g(an) \leq [r_n(\mathcal{P})]^2,$$

то для любой оценки $p^*(\cdot | \omega^1, \dots, \omega^N)$ по N независимым наблюдениям, каков бы ни был способ ее построения.

$$\sup_{\mathcal{P}} E_P^{(N)} \|p^*(\cdot) - p_P(\cdot)\|^2 \geq \gamma N^{-1} \cdot \Gamma(N).$$

3°. Пусть плотности априорного семейства \mathcal{P} распределений удовлетворяют условиям (12.25), а n -мерные размеры \mathcal{P} убывают как $g(n)$. Пусть $\Pi(N)$ — произвольное решающее правило, $\Pi: (\omega^1, \dots, \omega^N) \rightarrow P^*$, $p^*(\cdot) = (dP^*/d\mu)(\cdot)$. Тогда

$$\inf_{\Pi(N)} \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P^{(N)} \|p^*(\cdot) - p_P(\cdot)\|^2 \asymp N^{-1} \cdot \Gamma(N).$$

Во многих статистических проблемах требование (12.25) является слишком ограничительным. В то же время ясно, что без какой-то эквивалентности фишеровских метрик в касательных пространствах и порождаемых ими местных расстояний не обойтись. Понятие касательного расслоения для подмногообразия в бесконечномерном многообразии является достаточно тонким, ср. [52]. Как было отмечено нами в [34], дело сильно упрощается, если предполагать априорное семейство \mathcal{P} логарифмически (т. е. ${}^0\nabla$ -геодезически) выпуклым. Тогда любая статистика вида

$$q(\omega) = a \ln [(dP_1/dP_2)(\omega)] + b, \quad -\infty < a, b < \infty, \quad (12.34)$$

определяет некоторое направление внутри \mathcal{P} , а статистика

$$q(\omega) - E_P q(\omega), \quad (12.35)$$

если только $E_P q(\omega)$ существует, определяет касательный вектор в «точке» $P \in \mathcal{P}$.