

статистики, дающую $P_{t(\tau)}$ несмещенную оценку для однопараметрических подсемейств $\{P_{t(\tau)}\}$, где

$$t(\tau) = \theta + \tau z, \quad \forall z \in Z(y) = \{z : y^j z_j = 1\}, \quad (9.30)$$

где знак суммы по совпадающим индексам опущен. Отсюда

$$\text{Var}_\theta [y^j q_j(\omega)] \geq \sup_{z \in Z(y)} [w^{jk} z_j z_k]^{-1} = v_{jk} y^j y^k. \quad (9.31)$$

Последнее равенство есть известное свойство взаимно обратных положительно определенных матриц. При этом, верхняя грань (9.31) достигается на векторе z

$$z_j = v_{jk} y^k / v_{lk} y^l y^k. \quad (9.32)$$

Детали доказательства см. [34], или см. непосредственный вывод в [1] или [41].

Теорема 9.5. Пусть $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m\} = \mathcal{P} \subset \text{Car}_n$ есть семейство мер, заданное в открытой линейно связной области Θ , L_1 -дифференцируемое во всей области задания. Если параметр t допускает эффективную оценку $q(\omega)$, обращающую неравенство информации (9.26) в равенство, тогда:

1°. \mathcal{P} является каноническим m -параметрическим экспоненциальным семейством (или его открытым подмножеством) с направляющей вектор-статистикой $q(\omega)$ и некоторой канонической параметризацией s . Параметр t является натуральным статистическим параметром семейства, двойственным s . Все меры P_t взаимно абсолютно непрерывны и сосредоточены на подмножестве $E \subseteq \Omega$ — объединении всех атомов, имеющих строго положительную вероятность.

2°. Семейство $\{P_t\}$ определено (или может быть доопределено) для всех значений параметра t в выпуклой области $\text{Int } C$, где C — замкнутый выпуклый носитель меры $P_\theta q^{-1}$, см. определение 7.1.

3°. Оно может быть пополнено предельными распределениями семейства (его инфинитным краем), отвечающими значениям $t \in \partial C$. Все они сосредоточены на подмножествах множества E , и при $t \in \partial C$ часть собственных чисел матрицы Фишера $(w^{jk}(t))$ обращается в $+\infty$.

4°. При всех $t \in C$ оценка $q(\omega)$ эффективна.

Наметим идею доказательства. Так как семейство допускает несмещенную оценку, то все распределения семейства попарно различны, т. е. $P_t = P_\theta$ влечет

$$t = E_t q(\omega) = E_\theta q(\omega) = \theta.$$

Следовательно, числовые статистики $1(\omega), q_1(\omega), \dots, q_m(\omega)$ линейно независимы, даже если пренебречь их значениями на минимальном для семейства нуль-множестве. Иначе связь

$$1 = \lambda^{(1)} t_1 + \dots + \lambda^{(m)} t_m$$

не давала бы параметрам при их изменении заполнить откры-