

то  $P_1^N\{U(\eta, N)\} \geq 1 - \delta$  при  $N \geq N_0(\eta, \delta)$ . Следовательно, при  $N \geq N_0$

$$\alpha_N = E_0^{(N)} \pi_1(\varepsilon) = E_1^{(N)} \pi_1(\varepsilon) \exp[N f_N(\varepsilon)] \geq$$

$$\geq E_1^{(N)} \chi_U(\varepsilon) \pi_1(\varepsilon) \exp[-NI - N\eta] \geq (1 - b - \delta) \exp[-NI - N\eta],$$

откуда  $\liminf N^{-1} \ln \alpha_N \geq -I(P_0: P_1)$  по произвольности  $\eta$  и  $\delta$ .

Возьмем теперь решающее правило  $\Pi_N^b$  Неймана—Пирсона, для которого критическое значение  $k_N$  есть квантиль порядка  $b$   $P_1$ -случайной величины  $f_N(\varepsilon)$ , т. е.  $P_1^N\{K_N\} = 1 - b$ . Имеем

$$\alpha_N = E_0^{(N)} \chi_K(\varepsilon) = E_1^{(N)} \chi_K(\varepsilon) \exp[N f_N(\varepsilon)] \leq (1 - b) \exp[N k_N]. \quad (4.4)$$

Так как  $f_N(\varepsilon) \Rightarrow -I(P_0: P_1)$  при распределении  $P_1^N(d\varepsilon)$ , то и квантиль  $k_N \rightarrow -I(P_0: P_1)$ , откуда

$$\lim N^{-1} \ln (P_0^N \Pi_N^b)(\delta_1) = -I(P_0: P_1) = \liminf_{B(b, N)} N^{-1} \ln \alpha_N. \quad (4.5)$$

Прежде чем рассмотреть оптимальное минимаксное тестирование двух простых гипотез, рассмотрим элементарную геометрическую конструкцию, переносящую в нашу несимметричную пифагорову геометрию понятие *медиатриссы* — перпендикуляра к середине отрезка, как множества всех точек, равноудаленных от его концов. Пусть  $P_0(\cdot)$ ,  $P_1(\cdot)$  — два взаимно абсолютно непрерывных распределения вероятностей,  $p_0(\omega)$  и  $p_1(\omega)$  — их плотности по фиксированной доминирующей мере  $\mu$ . «Точки»  $P_0$  и  $P_1$  являются концами отрезка их смесей  $P_\theta = \theta P_1 + (1 - \theta) P_0$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , т. е. взвешенных средних арифметических. Кроме того, и для нас это не менее существенно, они являются концами отрезка геодезической — единственного однопараметрического канонического экспоненциального семейства (0.11) с направляющей статистикой  $q(\omega) = \ln p_1(\omega) - \ln p_0(\omega)$  (см. (4.3)), т. е. *нормированных взвешенных средних геометрических* (в [34] мы их называли средними геодезическими):

$$\forall s: 0 \leq s \leq 1, \quad p_s(\omega) = [p_1(\omega)]^s [p_0(\omega)]^{1-s} \exp[-H(s)], \quad (4.6)$$

где  $H(s)$  — логарифм нормирующего делителя, см. (0.12),

$$\begin{aligned} \exp[H(s)] &= \int_{\Omega} [p_1(\omega)]^s [p_0(\omega)]^{1-s} \mu(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega} [P_1(d\omega)]^s [P_0(d\omega)]^{1-s}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Двойственная канонической натуральной статистической («mixture» или «expectation») параметризация определяется