

В этом случае дисперсия $\text{Var}_P q(\omega)$, если она существует, задает P -местную «информационную» норму касательного вектора $q(\omega) \rightarrow \mathbf{E}_P q(\omega)$. Напомним, что в плоской ${}^0\nabla$ -связности при переносе $P \rightarrow R$ у касательного вектора $q(\omega)$ изменяется только центрирующая константа $\mathbf{E}_P q(\omega)$, см. (0.10):

$$q(\omega) - \mathbf{E}_P(\omega) \rightarrow q(\omega) - \mathbf{E}_R q(\omega). \quad (12.36)$$

Определение 12.2. Назовем логарифмически выпуклое семейство \mathcal{P} распределений вероятностей $P(\cdot)$ на (Ω, \mathcal{A}) квазиоднородным, если найдется положительная константа $C < \infty$, что для любой касательной к \mathcal{P} в смысле (12.34) статистики $q(\omega)$ и любых распределений $P, R \in \mathcal{P}$

$$|\ln \text{Var}_R q(\omega) - \ln \text{Var}_P q(\omega)| < \ln C, \quad (12.37)$$

т. е. длина ${}^0\nabla$ -касательного вектора, измеренная в P -местной фишеровой метрике, конечна и меняется в ограниченное число раз при его трансляции (12.36).

Строго говоря, ${}^0\nabla$ -касательные векторы нуждаются, даже для ${}^0\nabla$ -выпуклого семейства \mathcal{P} , в более точном определении. Например, касательными к \mathcal{P} векторами надо считать также пределы несмещенных при данном $P \in \mathcal{P}$ статистик вида (12.34). Ввиду выпуклости \mathcal{P} и характера условия (12.37), можно обойтись лишь партингенцией \mathcal{P} , т. е. линейным пространством векторов (10.34). Более систематически, но лишь для конечно параметрических статистических моделей сходный подход к построению расслоенного касательного пространства в терминах гильбертовых пучков начал развивать Амари [54]. Для конечно параметрических канонических экспоненциальных семейств он становится тривиальным, ср. [115].

Покажем, что в квазиоднородных семействах различные естественные «расстояния» эквивалентны друг другу.

Лемма 12.5. Пусть $\mathfrak{A} = \{P_s\}$ — каноническое экспоненциальное семейство на (Ω, \mathcal{A}) с каноническим параметром s и направляющей статистикой $q(\omega)$ и пусть $R \in \text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$ имеет общий с \mathcal{P} идеал \mathcal{L} нуль-множеств. Предположим, что все компоненты тензора

$$v_{jk} = \text{Cov}_R[q_j(\omega), q_k(\omega)] \quad (12.38)$$

существуют и конечны. Тогда для любых $P_x, P_y \in \mathcal{P}$

$$\text{Var}_R \ln [(dP_x/dP_y)(\omega)] = (x^j - y^j)(x^k - y^k)v_{jk}. \quad (12.39)$$

Для доказательства следует подставить в левую часть (12.38) выражение логарифма относительной плотности из (0.11).

Лемма 12.6. Пусть \mathcal{P} — квазиоднородное логарифмически выпуклое семейство и пусть \mathfrak{A} — каноническое экспоненциальное семейство с некоторой канонической параметризацией s , проходящее через точки P_x и P_y , где $P_x, P_y \in \mathcal{P}$. Если $R \in \mathcal{P}$ так же и направляющая статистика $q(\omega)$ семейства \mathfrak{A} норми-