

$t=\theta$. Какова бы ни была \mathcal{A} -измеримая статистика $f(\omega)$, ее среднее значение

$$m(t) = \mathbf{E}_t f(\omega) = \sum_i f_i p_i(t) \quad (9.10)$$

дифференцируемо как функция t при $t=\theta$, и для любой константы $c=c \cdot 1(\omega)$

$$|m'(\theta)|^2 \geq I(\theta) \cdot \mathbf{E}_\theta [f(\omega) - c]^2, \quad (9.11)$$

где $I(\theta)$ — информация по Фишеру, определяемая как

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{[p_i'(\theta)]^2}{p_i(\theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in K(\theta)} \frac{[p_k'(\theta)]^2}{p_k(\theta)}; \quad (9.12)$$

$$K(\theta) = \{k : p_k'(\theta) \neq 0\}. \quad (9.13)$$

Оно может быть записано также в виде

$$I(\theta) = \sum_K p_k(\theta) \left[\left(\frac{d}{dt} \ln p_k \right)(\theta) \right]^2 = 4 \sum_K [(d \sqrt{p_k}/dt)(\theta)]^2, \quad (9.14)$$

где и в (9.12) и в (9.14) суммирование по $K(\theta)$ может быть заменено суммированием по

$$\Lambda(\theta) = \{j : p_j(\theta) > 0\} \supseteq K(\theta), \quad (9.15)$$

что и объясняет правило $0^2/0=0$ раскрытия неопределенностей в левой сумме (9.12). При этом $0 \leq I(\theta) < \infty$.

Наметим идею доказательства. Из дифференцируемости всех $p_i(t)$ вытекает дифференцируемость их линейной комбинации (9.10) и аналогичной комбинации для статистики $f(\omega) - c \cdot 1(\omega)$. Отсюда, ввиду $\mathbf{E}_t 1(\omega) = 1$ и включения (9.15),

$$\begin{aligned} m'(\theta) &= \sum (f_i - c) p_i'(\theta) = \sum_K (f_k - c) p_k'(\theta) = \\ &= \sum_{\Lambda} (f_j - c) \sqrt{p_j} \cdot p_j'(\theta)^{-1/2} = \sum_{\Lambda} (f_j - c) \sqrt{p_j} \times \\ &\quad \times (\ln p_j)'(\theta) \sqrt{p_j}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Применяя к последним суммам неравенство Коши, получаем неравенство (9.11) с одним из представлений $I(\theta)$, в виде сумм, слагаемые которых почленно тождественно совпадают. Поскольку все производные конечны по определению, то конечна и величина $I(\theta)$.

Замечание 1. Неравенство (9.11) выполняется также для рандомизированных решающих правил $\Pi(\omega; d\tau)$ оценивания параметра t с множеством $T = \{t : \theta' \leq t \leq \theta''\}$ оценок τ (или лю-