

Лемма 8.3.1°. Дивергенцию Амари можно задать единой формулой как частный случай φ -дивергенции Чисара:

$$D_{\alpha}(P, Q) = \int_{\Omega} \varphi_{\gamma}(Q(d\omega)/P(d\omega)) P(d\omega) \quad (8.8)$$

с непрерывной по параметру γ выпуклой функцией $\varphi_{\gamma}(u)$

$$\gamma \neq 0, 1; \quad \alpha \neq \pm 1, \quad \varphi_{\gamma}(u) = -[\gamma(1-\gamma)]^{-1}[u^{\gamma} - 1],$$

$$\gamma = 1, \quad \alpha = 1, \quad \varphi_1(u) = u \ln u, \quad (8.9)$$

$$\gamma = 0, \quad \alpha = -1, \quad \varphi_0(u) = -\ln u,$$

$$\varphi'_{\gamma}(u) = u^{\gamma-2}; \quad \varphi'_{\gamma}(1) = 1, \quad \varphi'_{\gamma}(1) = 1, \quad \varphi_{\gamma}(1) = 0. \quad (8.10)$$

2°. Дивергенция $D_{\alpha}(P, Q)$ неотрицательна; $D(P, P) = 0$, при $P \neq Q$ имеем $0 < D_{\alpha}(P, Q) \leq +\infty$. Когда $\alpha \geq 1$, т. е. $\gamma \geq 1$ и Q не доминирует P , то обязательно $D_{\alpha}(P, Q) = +\infty$. При $\alpha \neq 0$ D_{α} не-симметрична, $D_{\alpha}(P, Q) \neq D_{\alpha}(Q, P)$ как правило.

3°. Дивергенции $D_{\pm\alpha}$ сопряжены в том смысле, что

$$D_{\alpha}(P, Q) = D_{-\alpha}(Q, P), \quad (8.11)$$

$$D_1(P, Q) = D_{-1}(Q, P) = I(Q : P), \quad (8.12)$$

$$D_0(P, Q) = D_0(Q, P) = 2d_H(P, Q). \quad (8.13)$$

Проверка всех этих свойств элементарна. Очевидна также связь α -дивергенций с информационными количествами Реньи

$$[2(\gamma - 1)]^{-1} \ln \int_{\Omega} [P(d\omega)]^{\gamma} [Q(d\omega)]^{1-\gamma}, \quad (8.14)$$

см. [185] и выше формулу (4.7); величина $2D_3(P, Q)$ совпадает с дивергенцией Кагана [5].

Лемма 8.4. Дивергенции Амари являются монотонными инвариантами в категории статистических решающих правил. При $\alpha \neq \pm 1$ ($\gamma \neq 0, 1$) дивергенции Амари, в отличие от инвариантов Реньи, не аддитивны в схеме независимых испытаний.

Для доказательства следует записать (8.8) по (3.13) и (8.10) через интегралы от монотонных инвариантов $\mu^{(\pm)}(z)$ в виде

$$D_{\alpha}(P, Q) = \int_0^1 \mu^{(-)}(y) y^{\gamma-2} dy + \int_1^{\infty} \mu^{(+)}(y) y^{\gamma-2} dy, \quad (8.15)$$

обобщающем представления (3.10) и (3.12), ср. [29].

Теорема 8.5. Пусть $P, Q, R \in \text{Сар}(\Omega, \mathcal{A})$, причем $R \gg Q \gg P$ при $\gamma \geq 1$ ($\alpha \geq 1$), и $R \ll Q \ll P$ при $\gamma \leq 0$ ($\alpha \leq -1$). Тогда

$$D_{\alpha}(P, R) - \{D_{\alpha}(P, Q) + D_{\alpha}(Q, R)\} \geq, =, \leq 0 \quad (8.16)$$