

С л е д с т в и е. Перечисленные характеристики являются монотонными инвариантами пар в марковской геометрии [18], [34].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (3.9) и (3.11) очевидно следуют из определений. Формулы (3.10) и (3.12) выводятся в [29], [34], [12], переходом к стандартному представлению (см. (3.4)) и последующему интегрированию интегралов Стильеса по частям, как при выводе (3.8). Наконец, суммы, интегралы с положительными весами, а также монотонные функции от монотонных инвариантов сами являются монотонными инвариантами.

Совершенно аналогично доказывается монотонная инвариантность φ -дивергенций Чисара, см. [108], [109] и ниже лемму 8.4

$$\begin{aligned} I_{\varphi}(Q, P) &= \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{dQ}{dP}(\omega)\right) P(d\omega) = \\ &= \int_0^1 \mu^{(-)}(z) \varphi''(z) dz + \int_1^{\infty} \mu^{(+)}(z) \varphi''(z) dz, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\varphi(\cdot)$ — выпуклая функция на \mathbf{R}^+ , $\varphi(1) = 0$. Еще одним полезным следствием леммы 3.4 является монотонная инвариантность информационной матрицы Фишера при марковских отображениях, что следует из монотонности расстояния s_{φ} .

Следующий круг вопросов индуцирован только что упомянутыми работами Чисара. Каждое информационное количество задает то или иное отношение близости, т. е. в конечном счете, некоторую топологию на совокупностях распределений вероятностей. Можно ли их сравнить? Еще более интересен вопрос о сравнении информационных метрик. Как известно, для метрики ρ в некотором пространстве должны быть выполнены аксиомы: 1°. $\rho(x, y) \geq 0$; 2°. $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow y = x$; 3°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; 4°. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Когда аксиома 2° не выполнена, говорят о псевдометрике. Чтобы охватить информационные количества, мы будем рассматривать несимметричные метрики, для которых не выполняется аксиома 3° (но аксиома 4° выполнена именно в указанной форме).

Т е о р е м а 3.5. Если на всех объектах $\text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ задана монотонно инвариантная симметричная метрика $\rho(P, Q)$, то

$$\rho(P, Q) \geq \frac{1}{8} \rho(R_{1/2}, R_{1/4}) \cdot d_V(P, Q), \quad (3.14)$$

где $R_{\theta}(\cdot)$ — распределение на $\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$,

$$R_{\theta}: R_{\theta}(\omega_1) = \theta, \quad R_{\theta}(\omega_2) = 1 - \theta, \quad \{R_{\theta}\} = \text{Cap}(\Omega_2, \mathcal{A}(\Omega_2)). \quad (3.15)$$

Если метрика ρ не симметрична, то (3.14) заменяется на

$$\rho(P, Q) \geq \frac{1}{8} \min \{\rho(R_{1/2}, R_{1/4}), \rho(R_{1/4}, R_{1/2})\} d_V(P, Q). \quad (3.16)$$