

соотношением (0.16)

$$t(s) = \int_{\Omega} q(\omega) P_s(d\omega) = E_s \ln p_1(\omega) - E_s \ln p_0(\omega) = \frac{dH}{ds}. \quad (4.8)$$

При этом t монотонно возрастает на отрезке,

$$t(0) = -I(P_1:P_0), \quad t(1) = I(P_0:P_1); \quad (4.9)$$

$$0 \leq s \leq 1, \quad \frac{d^2 H}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = \text{Var}_s q(\omega) = E_s [q(\omega)]^2 - [E_s q(\omega)]^2. \quad (4.10)$$

Нормирующий делитель и его логарифм являются аналитическими выпуклыми функциями от s , $H(0) = H(1) = 0$. Они достигают минимума при значении $s = \sigma$ таком, что $t(\sigma) = 0$. Для P_σ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \infty > I(P_0:P_\sigma) &= I(P_1:P_\sigma) = -H(\sigma) = \\ &= -\min_{0 \leq s \leq 1}^{\text{def}} H(s) = J(P_1, P_0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

«Точка» P_σ является в некотором смысле «серединой» геодезического отрезка $\{P_s, 0 \leq s \leq 1\}$:

$$P_\sigma = \arg \min_R \max \{I(P_0:R), I(P_1:R)\}. \quad (4.12)$$

Проходящая через нее гиперплоскость $\{R: E_R q(\omega) = 0\}$ есть аналог медиатриссы:

$$\int_{\Omega} q(\omega) R(d\omega) \geq 0 = t(\sigma) \Leftrightarrow I(P_1:R) \geq I(P_0:R), \quad (4.13)$$

если только хоть одно из уклонений Кульбака конечно. Все эти утверждения являются фактами общей теории экспоненциальных семейств, см. ниже § 7.

Теорема 4.2. Пусть распределения P_0 и P_1 взаимно абсолютно непрерывны. Тогда максимум вероятности ошибок у оптимального теста убывает как $\exp[-NJ(P_1, P_0)]$, точнее

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\Pi(N)} N^{-1} \ln \max \{\alpha_N(\Pi), \beta_N(\Pi)\} = -J(P_1, P_0). \quad (4.14)$$

Этот предел нижней грани достигается на правилах наибольшего правдоподобия $\Pi_N^{(0)}$ с критической областью

$$\mathcal{K} = \{\varepsilon : f(\varepsilon) > 0\}; \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{K}, \quad \delta(\varepsilon) = \delta_1, \quad (4.15)$$

образующих асимптотически оптимальную последовательность.

Первое доказательство этой теоремы дал Чернов [102], который определял $J(P_1, P_0)$ правым равенством в (4.11) и опирался на тонкую предельную теорему Крамера. Связи $J(P_1, P_0)$ с информационными количествами Кульбака, т. е. левые равенства в (4.11) были указаны Н. П. Салиховым [19], в связи с его исследованиями по минимаксному различению трех простых гипотез, см. также наши обзорные лекции [98],