

Лемма 8.1. Инвариантная риманова метрика (0.9) задается тензорным полем g_P

$$g_P(Y, Z) = E_P \eta \zeta - E_P \eta E_P \zeta = \text{Cov}_P[\eta, \zeta], \quad (8.3)$$

где $Y = \eta^k X_k$, $Z = \zeta^k X_k$ и

$$E_P \xi = \sum_k \xi^k p_k. \quad (8.4)$$

Теорема 8.2. Инвариантные связности ${}^1\nabla$ и ${}^{1-1}\nabla$ (то есть $\nabla^{\pm\alpha}$) сопряжены относительно инвариантной римановой метрики Фишера.

Доказательство. Определение (8.2) носит тензорный характер, его достаточно проверить только для базовых дифференцирований X_k , см. (6.13). Согласно лемме 8.1

$$g_P(X_j, X_k) = p_j \delta_{jk} - p_j p_k. \quad (8.5)$$

Действие X_k на базовые функции $p_j(P)$ определены формулами (8.3) и (8.4), действие оператора ∇ на базовые поля — формулами (6.43). Таким образом, все доказательство сводится к подстановке и приведению подобных. В частности, при $i \neq j \neq k \neq i$

$$g_P({}^{1-\gamma}\nabla_{X_i} X_j, X_k) = 2(1 - \gamma) p_i p_j p_k,$$

$$g_P(X_j, {}^{\gamma}\nabla_{X_i} X_k) = 2\gamma p_i p_j p_k,$$

$$X_i g_P(X_j, X_k) = 2p_i p_j p_k.$$

При совпадающих индексах в правых частях появляются дополнительные слагаемые, также отличающиеся только коэффициентами $1 - \gamma$, γ , 1. Оригинальное доказательство Амари [49] более элегантно; оно использует технику дифференцирования γ -аналога (6.41) функции правдоподобия, при $\gamma = 1$ совпадающей с ней самой, а при $\gamma = 0$ — с логарифмической.

Определение 8.1. При $\alpha = 2\gamma - 1$ назовем α -дивергенцией Амари величину

$$\gamma\alpha \neq \pm 1, D_\alpha(P, Q) = [\gamma(1 - \gamma)]^{-1} \left\{ 1 - \int_{\Omega} [P(d\omega)]^{1-\gamma} [Q(d\omega)]^\gamma \right\}, \quad (8.5')$$

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad D_1(P, Q) = \int_{\Omega} Q(d\omega) [\ln Q(d\omega) - \ln P(d\omega)], \quad (8.6)$$

$$\alpha = -1, \quad \gamma = 0,$$

$$\begin{aligned} D_{-1}(P, Q) = \\ = - \int P(d\omega) [\ln Q(d\omega) - \ln P(d\omega)]. \end{aligned} \quad (8.7)$$