

рована в смысле (12.38), т. е.  $\text{Var}_R q(\omega) = 1$ , то для натурального статистического параметра  $t = T(s)$ , отвечающего каноническому  $s$ , выполняется неравенство

$$C^{-1}(x-y) \leq T(x) - T(y) \leq C(x-y). \quad (12.40)$$

Доказательство вытекает из формулы (7.14)

$$dt/ds = \text{Var}_P q(\omega), \quad P = P_s.$$

**Лемма 12.7.** Пусть  $C$  — константа квазиоднородности (12.33) логарифмически выпуклого семейства  $\mathcal{P}$ . Тогда

$$\forall P, R \in \mathcal{P}, \quad C^{-1} \leq \frac{2I(P:R)}{\text{Var}_R [\ln(dP/dR)(\omega)]} \leq C. \quad (12.41)$$

**Следствие.**

$$\forall P, Q, R \in \mathcal{P}, \quad C^{-2} \leq \frac{2I(P:R)}{\text{Var}_Q [\ln(dP/dR)(\omega)]} \leq C^2. \quad (12.42)$$

**Доказательство.** Выберем на  ${}^0\nabla$ -геодезической, соединяющей  $R$  и  $P$ , стандартную каноническую параметризацию  $s$  с началом в  $R = P_0$  и нормированным направляющим вектором  $q(\omega)$ ,  $E_R q(\omega) = 0$ ,  $\text{Var}_R q(\omega) = 1$ . Тогда по формуле (7.22) теоремы 7.4  $t = T(s) = (d/ds)I(P_s:R)$ . Отсюда (12.41) получается интегрированием с учетом неравенства (12.40).

Таким образом, в квазиоднородных семействах  $\mathcal{P}$  можно указать много достаточно естественных способов измерять уклонение одного распределения от другого, но порождаемые ими близости оказываются одинаковыми. Для любых двух разумных «метрик»  $\rho_1$  и  $\rho_2$  на  $\mathcal{P}$  при некотором  $A = A(\rho_1, \rho_2)$  выполняется

$$\forall P, Q \in \mathcal{P}, \quad A^{-1} \cdot \rho_1(P, Q) \leq \rho_2(P, Q) \leq A \cdot \rho_1(P, Q).$$

Поэтому, хотя сама величина  $\rho(P, Q)$  зависит от конкретного выбора  $\rho$ , символы  $O(\rho^\alpha)$  или  $o(\rho^\alpha)$  имеют абсолютный смысл.

Очень важно, что сами такие «метрики» оказываются на  $\mathcal{P}$  непрерывными в порождаемой ими топологии (на всей совокупности  $\text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$  всех взаимно абсолютно непрерывных вероятностных мер на  $(\Omega, \mathcal{A})$  с общим идеалом  $\mathcal{Z}$  нуль-множеств. Для гильбертовой нормы  $|\text{Var}_R \ln[(dP/dQ)(\omega)]|^{1/2}$  это очевидно.

**Лемма 12.8.** Пусть  $C$  — константа квазиоднородности логарифмически выпуклого семейства  $\mathcal{P}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \forall P, Q, R \in \mathcal{P}, \quad |I(Q:R) - I(P:R)| &\leq C |\text{Var}_R \ln[(dQ/dP)(\omega)]|^{1/2} \times \\ &\times \{2 |\text{Var}_R \ln[(dP/dR)(\omega)]|^{1/2} + |\text{Var}_R \ln[(dQ/dP)(\omega)]|^{1/2}\}. \end{aligned} \quad (12.43)$$

**Доказательство.** При  $P = Q$  это неравенство тривиально, а при  $P = R$  или при  $Q = R$  оно дает менее точную оценку,