

в этих координатах форма

$$ds^2 = \frac{(dp_1)^2}{p_1} + \dots + \frac{(dp_n)^2}{p_n}. \quad (0.5)$$

Другими словами, квадрат дифференциала длины дуги измеряется хи-квадрат величиной.

Если сделать естественную замену координат

$$\forall i, \quad z_i = 2\sqrt{p_i}, \quad (0.6)$$

то симплекс превратится в положительный ортант поверхности сферы радиуса 2:

$$z : \forall i, 0 \leq z_i \leq 2; z_1^2 + \dots + z_n^2 = 4, \quad (0.7)$$

а фишера форма будет задавать евклидово расстояние на ней:

$$ds^2 = (dz_1)^2 + \dots + (dz_n)^2. \quad (0.8)$$

Однако и здесь попытки найти статистический смысл соответствующему расстоянию «в большом», еще ранее выписанному Бхаттачария [80],

$$s_F(P, Q) = 2 \arccos \int_{\Omega} \sqrt{P(d\omega) Q(d\omega)}, \quad (0.9)$$

оказались безуспешными [7], [79], [192]. Оно оказалось интересно только локально (когда оно эквивалентно $2\sqrt{d_H}$). Впрочем, сюда также входит его использование для «бескоординатного» определения дифференцируемости семейства распределений, см. ниже § 9 и приведенную там библиографию. Следует, однако, подчеркнуть, что объем, определяемый на гладком семействе полем фундаментальных тензоров Фишера, как указал Джеффрейс [147], [146], играет важную роль в теории байесовского оценивания, ср. ниже § 10.

Следующая существенная идея состояла в том, чтобы попытаться найти на многообразиях распределений вероятностей имеющую прямой статистический смысл линейную связность. Эта идея была выдвинута первым из авторов настоящей статьи и реализована вторым [26]. Была построена плоская связность, в которой параллельный перенос касательного вектора dP не зависит от пути переноса. На симплексах (0.4) перенос $(p, dp) \rightarrow (q, dq)$ описывается правилом

$$\forall i, \quad dq_i = q_i \left[\frac{dp_i}{p_i} - \sum_{k=1}^n \frac{dp_k}{p_k} q_k \right], \quad (0.10)$$

а для бесконечномерных многообразий — его обобщением в терминах производной Радона—Никодима. Геодезическими линиями и вполне геодезическими поверхностями в этой связности (теперь ее принято называть экспоненциальной) являются