

обозримыми, чем у непрерывно 2-гладких семейств. Будем обозначать

$$\frac{\partial}{\partial t^j} \ln p(\omega, t) = q_j(\omega; t); \quad \frac{\partial^2}{\partial t^j \partial t^k} \ln p(\omega; t) = q_{jk}(\omega; t) \quad (11.5)$$

и через $q_{jkl}(\omega; t)$ — соответствующую третью производную. Эти частные производные связаны с производными от плотности соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t^j} p(\omega; t) = p(\omega; t) q_j(\omega; t), \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^j \partial t^k} p(\omega; t) = p(\omega; t) [q_{jk}(\omega, t) + q_j(\omega; t) q_k(\omega; t)],$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^j \partial t^k \partial t^l} p(\omega, t) = p[q_{jkl} + q_j q_{kl} + q_k q_{lj} + q_l q_{jk} + q_j q_k q_l]. \quad (11.7)$$

Таким образом, в любой выпуклой подобласти $C \subseteq O_\theta$, $r(C) = r$, вторые производные плотности допускают интегрируемую мажоранту

$$|p''_{jk}(\omega; t)| \leq 2\pi^{(\theta)}(\omega) [h(\omega)]^2,$$

причем по неравенству Шварца ее интеграл не превышает $2\mathcal{H}^2[1+r\mathcal{G}]$. Отсюда вытекает

Лемма 11.2. Для 2-гладкого семейства $\{P_t, t \in \Theta\}$ частные производные плотности $p'_j(\omega; t)$ и $p''_{jk}(\omega; t)$ являются плотностями зарядов $P'_j(\cdot | t)$ и $P''_{jk}(\cdot | t)$, интегралы по всему пространству от них тождественно равны нулю.

Следствие. В условиях леммы тождественно

$$\forall j, \quad E_t q_j(\omega; t) = 0, \quad (11.8)$$

$$\forall j, k, \quad -E_t q_{jk}(\omega; t) = E_t q_j(\omega; t) q_k(\omega; t) = w_{jk}(t), \quad (11.9)$$

где $W(t) = (w_{jk}(t))$ — матрица информации Фишера.

В определении 11.1 обычно сложнее всего проверять требование 3° с условием (11.2). Можно указать достаточный признак гладкости, наглядно показывающий к какому классу семейств естественно прикладывается определение 11.1. Пусть простое семейство $\{P_t, t \in \Theta\}$ удовлетворяет требованиям 1°, 2° и 4° определения m -гладкости, причем для каждого $\theta \in \Theta$ можно указать такое $z_\theta > 0$, что

$$E_\theta \exp [z_\theta h(\omega)] < \infty.$$

Тогда семейство будет m -гладким; при $r < z_\theta / 5\sqrt{n}$ $p(\omega, \theta) \times \exp [\pm \sqrt{nr} h(\omega)]$ — мажорантой и минорантой плотностей, а

$$g^{(\theta)}(\omega) = p(\omega; \theta) h(\omega) \exp [r \sqrt{nr} h(\omega)]$$

— требуемой мажорантой производных $p'_j(\omega, t)$. Таким образом,