

3°. Для каждого $\theta \in \Theta$ найдется своя окрестность O_θ , в которой производные $p'_j(\omega; t)$ допускают мажоранту $g^{(\theta)}(\omega) = (dG^{(\theta)}/d\mu)(\omega)$:

$$\forall t \in O_\theta, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad |p'_j(\omega; t)| \leq g^{(\theta)}(\omega); \quad |P'_j|(\cdot | t) \leq G^{(\theta)}(\cdot), \quad (11.1)$$

$$\langle G^0, G^0 \rangle_{P(t)} = E_t [g^{(\theta)}(\omega)/p(\omega; t)]^2 \leq \mathcal{G}_\theta^2. \quad (11.2)$$

4°. Для каждого θ в указанной окрестности O_θ все частные производные до m -го порядка включительно допускают (общую) мажоранту

$$\forall t \in O_\theta, \quad |k| = 1, \dots, m, \quad |(\partial^{|k|}/\partial t^k) \ln p(\omega; t)| \leq |h^{(\theta)}(\omega)|^{|k|}, \quad (11.3)$$

$$k = (k_1, \dots, k_n), \quad \partial t^k = \partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}, \quad |k| = k_1 + \dots + k_n,$$

$$\forall t \in O_\theta, \quad E_t [h^{(\theta)}(\omega)]^{4m} \leq \mathcal{H}_\theta^{4m} < \infty.$$

Это определение m -гладкого семейства не зависит от выбора основной меры μ , а также от выбора гладкой системы параметризации, если только якобианы перехода всюду отличны от нуля. При переходе от одной меры μ к другой мажоранта $g^{(\theta)}(\omega)$ умножается на соответствующую плотность. При переходе от одной системы параметров к другой мажоранту $g^{(\theta)}(\omega)$ для первых производных плотности следует умножить на коэффициент максимального растяжения и т. д. Особенно просто выглядит эта конструкция, когда переход задается аффинным преобразованием.

Покажем для полноты, что рассматривавшиеся в § 10 $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейства являются непрерывно 1-гладкими.

Лемма 11.1. Если семейство $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\}$ является непрерывно 1-гладким, то оно входит в класс $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейств, причем в окрестности каждой точки $\theta \in \Theta$.

$$\forall t \rightarrow \theta, \quad \|P(t) - P(\theta)\|_\theta + \|P(t) - P(\theta)\|_t \rightarrow 0,$$

$$\forall j, \quad \forall t \rightarrow \theta, \quad \|P'_j(t) - P'_j(\theta)\|_\theta + \|P'_j(t) - P'_j(\theta)\|_t \rightarrow 0.$$

Для доказательства заметим, что на выпуклом множестве $C \subseteq O_\theta$ размера $r = r(C) = \sup_C \|t - \theta\|$ сами плотности $p(\omega; t)$ допускают мажоранту

$$\pi^{(\theta)}(\omega) = p(\omega; \theta) + r g^{(\theta)}(\omega); \quad E_t \pi^{(\theta)}(\omega) \leq [1 + r \mathcal{G}_\theta]^2, \quad (11.4)$$

что следует из формулы конечных приращений и известной теоремы Лебега об интегрировании ограниченной сходящейся последовательности функций.

Далее мы будем рассматривать в основном 3-гладкие семейства (не предполагая при этом непрерывности третьих производных). Третьи производные будут использоваться только для оценок остаточных членов, чтобы сделать эти оценки более