

будут атомы  $A_1, \dots, A_m$ ,  $m \leq n$ ,  $\Xi = A_1 \cup \dots \cup A_m$ . Тогда по непрерывности дифференцируемых функций  $p_i(t)$  на этих же атомах будут строго положительные распределения  $P_t(\cdot)$  при близких значениях  $t$ , а остальные  $p_j(t) = 0$  тождественно в силу предположенной максимальности. В этом малом интервале условия (9.18) обращения неравенства (9.17) в равенство можно записать в виде

$$I(t)[q_i - t] = (d/dt) \ln p_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \quad (9.23)$$

перейдя, ввиду  $p_i(t) > 0$ , от  $\sqrt{p_i}$  к  $\ln p_i$ . Если положить

$$s(t) = \int_{\tau}^t I(\theta) d\theta, \quad H(s(t)) = \int_{\tau}^t \theta I(\theta) d\theta, \quad (9.24)$$

где  $(ds/dt)(t) = I(t) > 0$ , то приходим к выражению вида (7.1)

$$\ln p_i(t(s)) = \ln p_i(\tau) + sq_i - H(s) \quad (9.25)$$

для однопараметрического канонического экспоненциального семейства. Дальнейшее аналитическое продолжение (9.25) проводится стандартной техникой.

Аналогу теоремы 9.2 для многопараметрических семейств можно придать следующую форму

**Теорема 9.4.** Пусть  $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m\} = \mathcal{P} \subset \text{Cap}_n$  — семейство вероятностных мер, заданное для открытой области  $\Theta$ , и пусть  $q(\omega)$  есть вектор-статистика, задающая несмещенную оценку параметра семейства

$$E_t q(\omega) = t.$$

1°. Если семейство  $\mathcal{P}$   $L_1$ -дифференцируемо при  $t = \theta$ ,  $W = W(\theta)$  — информационная матрица Фишера (3.21),  $W^{-1} = V = (|v_{jk}|)_{j,k=1}^m$ , то

$$\sum y^j y^k E_{\theta} [q_j(\omega) - \theta_j][q_k(\omega) - \theta_k] \geq \sum y^j y^k v_{jk}, \quad (9.26)$$

где  $y = (y^1, \dots, y^m)$  — любой вектор сопряженного пространства  $\mathbb{R}^m$ .

2°. Неравенство (9.26) превращается в равенство, эквивалентное  $m^2$  соотношениям

$$E_{\theta} [q_j(\omega) - \theta_j][q_k(\omega) - \theta_k] = v_{jk}, \quad (9.27)$$

тогда и только тогда, когда почти всюду по мере  $P_{\theta}$

$$\sum_j v_{jk} (\partial p / \partial t_j)(\omega, t)|_{t=\theta} = q_k(\omega - \theta_k), \quad k = 1, \dots, m \quad (9.28)$$

или, что эквивалентно,  $P_{\theta}$ -почти всюду

$$p'_j(\omega; \theta) = p(\omega; \theta) \sum_k \omega^{jk} [q_k(\omega) - \theta_k], \quad j = 1, \dots, m. \quad (9.29)$$

Идея доказательства состоит в том, что левую часть (9.26) можно проинтерпретировать, как  $\text{Var}_{\theta}[y^j q_j(\omega)]$ , т. е. дисперсию