

справедливо неравенство

$$(2r)^{-m} \int_C \dots \int E_t^{(N)} \|\tau(\omega^1, \dots, \omega^N) - t\|^2 dt^1 \dots dt^n \geqslant \frac{1}{(1+\eta)^2} \cdot \frac{n}{N} \cdot \left[1 - \frac{\text{th } r \sqrt{N}}{r \sqrt{N}} \right]. \quad (10.19)$$

Дополнение. Той же величиной оценивается снизу средний риск любого рандомизированного правила $\Pi = \Pi(N)$ оценки t по N наблюдениям,

$$\mathfrak{R}_{\Pi(N)}(t) = E_t^{(N)} \int_C \dots \int \|\tau - t\|^2 \Pi(\omega^1, \dots, \omega^N; d\tau^1 \times \dots \times d\tau^n). \quad (10.20)$$

Для доказательства заметим, что когда куб $C_r(z, \theta)$ выбран, по одномерным неравенствам (9.11) в каждой точке $t \in C_r(z, \theta)$

$$E_t^{(N)} \|\tau_j(\varepsilon) - t_j\|^2 \geqslant \|(m^j)'(t) - t^j\|^2 + (1+\eta)^{-2} [(m^j)'(t)]^2 N^{-1}.$$

Складывая все такие неравенства, получаем

$$E_t^{(N)} \|\tau(\varepsilon) - t\|^2 \geqslant \|m(t) - t\|^2 + (1+\eta)^{-2} N^{-1} \sum_j [\partial m^j(t) / \partial t^j]^2, \quad (10.21)$$

где в правую часть входит определяемое статистикой $\tau(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемое отображение $m(\cdot) : C_r(z, \theta) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Вычислив явно экстремаль квадратичного функционала — среднего по объему $C_r(z, \theta)$ от правой части (10.21), получаем правую часть (10.19), см. [34], [31].

Для дальнейшего заметим, что в каждом кубе $C_r(z, \theta) \subset O'_{\varepsilon n}$ в виду его выпуклости выполнены условия леммы 10.3.

Теорема 10.6. В условиях теоремы 10.5 для любой детерминированной оценки $\tau(\varepsilon)$ параметра t по N наблюдениям при функции потерь $L(\tau; t) = 2I(P_t : P_\tau)$ средний риск

$$[\text{Vol}\{C_r(z, \theta)\}]^{-1} \int_C \dots \int 2I(P_t : P_\tau) E_t^N \text{Vol}\{dt^1 \times \dots \times dt^n\} \geqslant (1+\eta)^{-3} (1+B_n\eta)^{-1} n N^{-1} [1 - r^{-1} N^{-1/2} \text{th}(r N^{1/2})], \quad (10.22)$$

где $\text{Vol}\{\cdot\}$ — объем Джеффрейса [147], [146], т. е. естественный объем, порождаемый метрикой Фишера,

$$\text{Vol}\{dt^1 \times \dots \times dt^n\} = [\det W(t)]^{1/2} dt^1 \cdot \dots \cdot dt^n. \quad (10.23)$$

Той же величиной оценивается в этих условиях снизу средний риск для любого рандомизированного правила оценивания параметра t .