

саму постановку задачи, допустив в качестве оценки  $P^*$  неизвестного распределения  $P \in \mathcal{P}$  также и распределения, не принадлежащие  $\mathcal{P}$ . Например, для априорного искривленного экспоненциального подсемейства  $\mathcal{P}'$  канонического семейства  $\mathcal{P}$  брать также  $P^* \in (\mathcal{P} - \mathcal{P}')$ . Что подобные решающие правила при универсальной функции потерь могут приводить к меньшему риску — легко усмотреть.

**Пример 7.** Подсемейство семейства одномерных нормальных распределений  $P_a$  со стандартом  $\sigma=1$  и средним  $a \in 2\mathbb{Z}$ , т. е.  $a=0, \pm 2, \pm 4, \dots$

У подсемейства этого примера для любого решающего правила  $\Pi$  по одному наблюдению  $\xi$  при множестве  $2\mathbb{Z}$  решений  $\alpha$  и универсальной функции потерь  $|\alpha - a|^2 = 2I(P_a : P_\alpha)$

$$\sup_{2\mathbb{Z}} \mathfrak{R}_\Pi(a) \geq 4[1 - 2\Phi(1)] \approx 1,27, \quad (9.1)$$

в то время как классическая оценка  $\Xi: \alpha = \xi \in \mathbb{R}$  имеет риск  $\mathfrak{R}_\Xi(a) = 1 < 1,27$  [34]. Как мы увидим далее, для гладких семейств, если выгода и есть, она асимптотически пренебрежимо мала.

Центральное место в теории оценок параметра занимает неравенство информации (его связывают с именами Крамера [106], Рао [179], Дармуа [111] и Фреше [129]) и оно показывает, что статистические оценки параметра для гладких априорных семейств не могут быть слишком точны. Сформулируем и обсудим сперва его мультиномиальный однопараметрический вариант, чтобы выяснить некоторые геометрические аспекты.

Однопараметрическое семейство  $\{P_t, \theta' < t < \theta''\} \subset \text{Int Car}_n$  (см. (6.39)), взаимно абсолютно непрерывных вероятностных мер  $P_t(\cdot)$  естественно называть дифференцируемым при  $t=\theta$ , если дифференцируемы при  $t=\theta$  все координаты  $p_i(t) = p_i(P_t) = P_t(A_i)$ . Не представляет труда перенести это определение на семейства, целиком лежащие внутри какой-то грани симплекса  $\text{Car}_n$ . Сложнее дать осмысленное для статистических приложений определение дифференцируемости при  $t=\theta$ , если некоторые вероятности  $p_i(t) = p_i(P_t)$  обращаются в нуль только в точке  $t=\theta$ , и строго положительны в некоторой ее проколотой окрестности. Оказывается, грубо говоря, что с каждой инвариантной связностью  $\nabla$  при  $0 < \gamma \leq 1$  связывается своя трактовка дифференцируемости. Они образуют так называемую *иерархию  $L_r$ -дифференцируемостей*, где  $r = \gamma^{-1} \geq 1$  (см. [198]), использующих каждое изображение семейства на своем (см. (6.40)) многообразии  $\Sigma_n^{(1/r)}$  с присоединенным краем, т. е. на замкнутой оболочке  $[\Sigma_n^{(1/r)}]$ :

$$L: l_1 \geq 0, \dots, l_n \geq 0; \quad l_1' + \dots + l_n' = r'. \quad (9.2)$$

В частности, преобразование координат  $l_i = 2\sqrt{p_i}$  (см. (0.6)) превращает единичный симплекс (0.4), изображающий совокуп-