

Определение 8.3. Пусть задано распределение вероятностей $P \in \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{L})$, с идеалом \mathcal{L} нуль-множеств, и \mathcal{A} — измеримые числовые статистики $q_1(\omega), \dots, q_m(\omega)$, линейно независимые $\text{mod } \mathcal{L}$. **Задача А информационного проектирования** на линейную «гиперплоскость» \mathcal{P} всех распределений вероятностей $R \ll P$, выделяемую условиями

$$E_R q_j(\omega) = \int_{\Omega} q_j(\omega) R(d\omega) = \tau_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (8.24)$$

состоит в отыскании проекции R_P «точки» P на \mathcal{R} ,

$$R_P = \operatorname{argmin}_{\mathcal{R}} I(P:R). \quad (8.25)$$

Эту проекцию мы будем называть *орто-проекцией*, когда

$$\forall R \in \mathcal{R}, \quad \int_{\Omega} [\ln P(d\omega) - \ln R_P(d\omega)] [R(d\omega) - R_P(d\omega)] = 0. \quad (8.26)$$

Решение задачи А связано с построением канонического экспоненциального семейства \mathcal{P} с $P_0 = P$ и направляющими статистиками $q_j(\omega)$.

Теорема 8.9. Если построенное по $P_0 = P$ и вектор-статистике $q(\omega)$ каноническое семейство \mathcal{P} регулярно, и точка $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$ принадлежит открытому ядру замкнутого выпуклого носителя меры $Pq^{-1}(\cdot)$ в \mathbb{R}^m , то решение задачи А существует, единственно и является орто-проекцией. Оно дается $P_\sigma \in \mathcal{P}$ со значением двойственного параметра $t(\sigma) = \tau$.

Помимо самостоятельной роли в теории ∇^α -геодезических семейств, α -дивергенции Амари имеют некоторые приложения к теории канонических экспоненциальных семейств. Так, конечность 3-дивергенции влечет конечность «информационной энергии» Оническу [172],

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{Q(d\omega)}{P(d\omega)} \right]^2 P(d\omega) &= 1 + \int_{\Omega} \left[\frac{Q(d\omega) - P(d\omega)}{P(d\omega)} \right]^2 P(d\omega) = \\ &= 1 + 2D_3(P, Q), \end{aligned} \quad (8.27)$$

отличающейся на 1 от дивергенции Кагана [5]. А этот интеграл — нормирующий делитель в выражении (4.6) плотности $p(\omega, s)$ из ${}^0\nabla$ -семейства, соединяющего P и Q , которое тем самым может быть продолжено за «точку» на такое же расстояние по каноническому параметру. Условия такого рода обеспечивают применимость дифференциально-геометрической техники при рассмотрении гладких семейств распределений вероятностей на бесконечных алгебрах, см. [34].

§ 9. Параметрическая задача статистического оценивания. Неравенство информации

Как известно, в задачах статистической точечной оценки труднее всего по исходам эксперимента различать взаимно аб-