

риации (3.3) для разностей $Q - zP$:

$$\mu^{(\pm)}(z) = (Q - zP)^{\pm}, \quad \mu^{(+)}(z) - \mu^{(-)}(z) = 1 - z, \quad (3.6)$$

где функция $\mu^{(+)}(z)$ монотонно не возрастает, $\mu^{(+)}(0) = 1$, $\mu^{(+)}(\infty) = Q \left\{ \omega: \frac{dQ}{dP}(\omega) = +\infty \right\}$. Любой марковский морфизм Π действует на пространстве $\text{Sap}(\Omega, \mathcal{A})$ линейно, а на его выпуклом подмножестве $\text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ — аффинно, т. е.

$$(Q - zP)\Pi = Q\Pi - zP\Pi. \quad (3.7)$$

Поэтому, линейные комбинации $Q - zP$ или $\alpha Q + (1 + \alpha)P$ дают примеры ковариантов пары (P, Q) в категории CAP , притом ковариантов абсолютных (т. е. наследственных). Некоторые вопросы теории ковариантов будут затронуты в § 6; там же будут даны строгие определения.

Теорема 3.3. Функции $\mu^{(+)}(z)$ задают полную систему инвариантов пары $(P, Q) \in \text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$, притом монотонных инвариантов.

Доказательство. Монотонная инвариантность $\mu^{(+)}(z)$ вытекает из ковариантности (3.7) разности $Q - zP$ и леммы 3.1. Полнота системы $\mu^{(+)}(z)$ вытекает из леммы 3.2 и интегрального представления

$$\mu^{(-)}(z) = (zP - Q) \{ \omega: f(\omega) < z \} = \int_0^z F(y) dy, \quad (3.8)$$

получаемого интегрированием по частям и позволяющего определить с помощью (3.6) левую производную функции $\mu^{(-)}(z)$ по функции $\mu^{(+)}(z)$.

Исходя из эквивалентных систем $\{ \mu^{(+)}(z) \}$ и $\{ \mu^{(-)}(z) \}$, мы можем находить и другие монотонные инварианты.

Лемма 3.4. Введенные соответственно формулами (0.1), (0.2), (0.9), (0.13) информационные расстояния и характеристики различия допускают следующие представления через функции $\mu^{(\pm)}(z)$:

$$d_V(Q, P) = \mu^{(+)}(1) + \mu^{(-)}(1) = 2\mu^{(+)}(1), \quad (3.9)$$

$$d_H(Q, P) = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu^{(-)}(z) z^{-3/2} dz + \frac{1}{2} \int_1^\infty \mu^{(+)}(z) z^{-3/2} dz, \quad (3.10)$$

$$s_F(Q, P) = 2 \arccos [1 - d_H(Q, P)]/2, \quad (3.11)$$

$$I(P:Q) = \int_0^1 \mu^{(-)}(z) z^{-1} dz + \int_1^\infty \mu^{(+)}(z) z^{-1} dz. \quad (3.12)$$