

выполнено неравенство

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathbf{E}_s^{(N)} \|\zeta - s\|^2 \geq \frac{1}{4} \min \{r^2, C^{-1}nN^{-1}\}, \quad (12.47)$$

где C — константа квазиоднородности подсемейства \mathcal{P}_r .

Доказательство. Из леммы 12.9 вытекает, что для семейства \mathcal{P}_r справедливы одномерные неравенства информации (9.11). Поскольку статистики ζ^j по условию ограничены, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(N)} [\zeta^j - s^j]^2 &\geq [\mathbf{E}_s^{(N)} \zeta^j - s^j]^2 + \\ &+ [\partial/\partial s^j] \mathbf{E}_s^{(N)} \zeta^j]^2 [N \text{Var}_s q_j(\omega)]^{-1}. \end{aligned}$$

В силу (12.44) и (12.37), $\text{Var}_s q_j(\omega) \leq C$, что дает

$$\mathbf{E}_s^{(N)} [\zeta^j - s^j]^2 \geq [\mathbf{E}_s^{(N)} \zeta^j - s^j]^2 + C^{-1}N^{-1} [(\partial/\partial s^j) \mathbf{E}_s^{(N)} \zeta^j]^2, \quad (12.48)$$

что, с точностью до обозначений, совпадает с неравенством (12.30). Последующие рассуждения идентичны использованным при доказательстве леммы 12.3.

По аналогии с понятиями линейного поперечника (по Колмогорову) и внутреннего радиуса (по Никольскому) тела в метрическом пространстве определим сходные информационные характеристики для логарифмически выпуклых квазиоднородных семейств.

Определение 12.3. Квадратом $\delta_n^{(2)}(\mathcal{P})$ n -мерного информационного поперечника семейства $\mathcal{P} \subset \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$ назовем величину

$$\delta_n^{(2)}(\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{G}(n)} \sup_{R \in \mathcal{P}} \inf_{P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{G}(n)} 2I(P:R), \quad (12.49)$$

где $\mathcal{G}(n)$ — всевозможные n -мерные канонические экспоненциальные семейства подсовокупности $\text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$.

В этом определении (12.49) в отличие от (12.23) мы рассматриваем отклонение от \mathcal{P} не всего $\mathcal{G}(n)$, а только пересечения $\mathcal{G} \cap \mathcal{P}$ от \mathcal{P} . Это связано с тем, что вне \mathcal{P} наши гильбертовы метрики не обязаны быть эквивалентными.

Рассмотрим теперь каноническое экспоненциальное семейство $\mathcal{G} = \{P_s, s \in G\}$ размерности n . Предположим, что $P_0 \in \text{Int } \mathcal{G}$ и эллипсоид $\{s : s^j s^k v_{jk}(0) \leq r^2\} = K_r \subset G$. Такое подсемейство мы будем называть n -мерным диском радиуса r (с центром P_0):

$$\mathcal{H}(r, P_0, \mathcal{G}) = \{P_s : \text{Var}_0[\ln(dP_s/dP_0)(\omega)] \leq r^2\}. \quad (12.50)$$

Определение 12.4. Квадратом $\rho_n^{(2)}(\mathcal{P})$ n -мерного внутреннего информационного радиуса логарифмически выпуклого семейства $\mathcal{P} \subset \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$ назовем величину

$$\rho_n^{(2)}(\mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{G}(n)} \sup_{\mathcal{H}(r, P_0, \mathcal{G}(n)) \subset \mathcal{P}} r^2(\mathcal{H}(r, P_0, \mathcal{G}(n))). \quad (12.51)$$

Лемма 12.12. Если \mathcal{P} — ограниченное, т. е. $\delta_0^{(2)}(\mathcal{P}) < \infty$, квазиоднородное логарифмически выпуклое семейство, и $\delta_n^{(2)}(\mathcal{P}) \leq B$, то найдется такое m -мерное, $m \leq n$, компактное ло-