

мер, при функции потерь

$$\|\pi^*(\cdot) - p(\cdot)\|^2 \quad (12.2)$$

в вальдовской парадигме, или при измерении ее квантилем $Q_\varepsilon(\|\pi^* - p\|)$ порядка $1 - \varepsilon$.

Предположим, что функции $\varphi_j(\omega) = \varphi_{j,n}(\omega)$ образуют ортонормированный базис n -мерного подпространства $\mathcal{E}_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset \mathcal{L}^2(r)$,

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_{\Omega} \varphi_j(\omega) \varphi_k(\omega) r(\omega) \mu(d\omega) = \delta_{jk}. \quad (12.3)$$

Тогда коэффициенты

$$a_j = (\varphi_j, p) = \int_{\Omega} \varphi_j(\omega) r(\omega) p(\omega) \mu(d\omega) \quad (12.4)$$

среднеквадратичной аппроксимации плотности $p(\omega)$, т. е. ее $\mathcal{L}^2(r)$ -ортogonalной проекции на \mathcal{E}_n ,

$$p_n(\cdot) = a_1 \varphi_1(\cdot) + \dots + a_n \varphi_n(\cdot) \quad (12.5)$$

могут быть истолкованы, как математические ожидания случайных величин $\alpha_j(\omega) = \varphi_j(\omega) r(\omega)$:

$$a_j = E_p \alpha_j(\omega) = \int_{\Omega} [\varphi_j(\omega) r(\omega)] P(d\omega). \quad (12.6)$$

Поэтому эти коэффициенты, по закону больших чисел, допускают состоятельные оценки

$$\alpha_j^* = N^{-1}[\alpha_j(\omega^1) + \dots + \alpha_j(\omega^N)] = (\varphi_j, d\Xi_N/d\mu), \quad (12.7)$$

где $\Xi_N(\cdot)$ — эмпирическая дискретная мера

$$\Xi_N(\cdot) = N^{-1}[\delta(\cdot | \omega^1) + \dots + \delta(\cdot | \omega^N)] \quad (12.8)$$

с атомами веса N^{-1} в наблюдаемых исходах $\omega^1, \dots, \omega^N$. Для не-дискретных алгебр \mathcal{A}/\mathcal{Z} производная $d\Xi_N/d\mu$ существует лишь как обобщенная функция, т. е. имеют смысл только скалярные произведения (12.7), но в дискретном случае линейная комбинация

$$\pi_{nN}^*(\cdot) = \sum_j \alpha_j^* \varphi_j(\cdot) = \sum_j (\varphi_j, d\Xi_N/d\mu) \varphi_j(\cdot) \quad (12.9)$$

есть $\mathcal{L}^2(r)$ -ортотпроекция $(d\Xi_N/d\mu)(\cdot)$ на \mathcal{E}_n .

Оценку плотности (12.9) теперь принято называть *проекционной оценкой*. Вычислим ее погрешность. По теореме Пифагора в $\mathcal{L}^2(r)$

$$\begin{aligned} \|\pi^*(\cdot) - p(\cdot)\|^2 &= \|p_n(\cdot) - p(\cdot)\|^2 + [\alpha_1^* - a_1]^2 + \dots \\ &\quad \dots + [\alpha_n^* - a_n]^2. \end{aligned} \quad (12.10)$$