

[99]. В этой связи значение $J(P_1, P_0)$ мы будем называть *симметричным информационным количеством Чернова—Салихова*.

Наметим элементарное доказательство. Построим две новые статистики $g_N^{(j)}(\varepsilon)$, $j=0, 1$:

$$g_N^{(j)}(\varepsilon) = N^{-1} \{ [\ln p_j(\omega^1) - \ln p_\sigma(\omega^1)] + \dots \\ \dots + [\ln p_j(\omega^N) - \ln p_\sigma(\omega^N)] \}. \quad (4.16)$$

По закону больших чисел $g_N^{(j)}(\varepsilon) \Rightarrow -I(P_j; P_\sigma)$ при P_σ^N -распределениях исходов. Другими словами, при $N \geq N_0(\eta, \delta)$

$$P_\sigma^N(U_N^{(j)}) \geq 1 - \delta; \quad U_N^{(j)} = \{ \varepsilon : g_N^{(j)}(\varepsilon) + I(P_j; P_\sigma) \geq -\eta \}.$$

Для любого решающего правила Π_N задачи, $\Pi = \{\pi_0(\varepsilon), \pi_1(\varepsilon)\}$, $\forall \varepsilon$, $\pi_0(\varepsilon) + \pi_1(\varepsilon) = 1$, так что $E_\sigma^{(N)} \pi_0(\varepsilon) + E_\sigma^{(N)} \pi_1(\varepsilon) = 1$, где среднее $E_\sigma^{(N)}$ берется здесь по мере P_σ^N . Выберем из последних двух слагаемых большее. Пусть это $E_\sigma^{(N)} \pi_1(\varepsilon) \geq 1/2$. Тогда при $N \geq N_0(\eta, \delta)$

$$\alpha_N = E_0^{(N)} \pi_1(\varepsilon) = E_\sigma^{(N)} \pi_1(\varepsilon) \exp [N g_N^{(j)}(\varepsilon)] \geq \\ \geq E_\sigma^{(N)} \chi_U(\varepsilon) \pi_1(\varepsilon) \exp [-NI - N\eta] \geq \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \exp [-NI - N\eta].$$

При $E_\sigma^{(N)} \pi_0(\varepsilon) \geq 1/2$ выкладка аналогична с заменой $g^{(1)}$ на $g^{(0)}$, но с той же константой I , поскольку $I(P_1; P_\sigma) = I(P_0; P_\sigma) = J(P_1, P_0)$. Следовательно,

$$\liminf_{\Pi} N^{-1} \ln \max \{ \alpha_N(\Pi), \beta_N(\Pi) \} \geq -J(P_1, P_0).$$

Заметим, что вместо P_σ можно было взять любое $R \in \text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ (см. [19]), получив худшую в силу (4.12) оценку снизу через $\min \{ I(P_1; R), I(P_0; R) \}$.

Логарифмы плотностей канонического экспоненциального семейства афинны по каноническому параметру s с точностью до слагаемого, не зависящего от ω . Прологарифмировав (4.6) при $s = \sigma$ и воспользовавшись соотношением (4.16), находим

$$g_N^{(0)}(\varepsilon) = -\sigma \cdot f_N(\varepsilon) - J(P_1, P_0), \quad g_N^{(1)}(\varepsilon) = (1 - \sigma) f_N(\varepsilon) - J(P_1, P_0).$$

Поскольку по (4.15) для правила $\Pi_N^{(0)}$ наибольшего правдоподобия $f_N(\varepsilon) > 0$ на его критическом множестве \mathcal{H} , то

$$\alpha_N(\Pi_N^{(0)}) = E_0^{(N)} \chi_{\mathcal{H}}(\varepsilon) = E_\sigma^{(N)} \chi_{\mathcal{H}}(\varepsilon) \exp [N g_N^{(0)}(\varepsilon)] = \\ = E_\sigma^{(N)} \chi_{\mathcal{H}}(\varepsilon) \exp [-\sigma N f_N(\varepsilon) - NJ] \leq \exp [-NJ(P_1, P_0)].$$

Аналогично, $\beta_N(\Pi_N^{(0)}) \leq \exp [-NJ(P_1, P_0)]$, что и требовалось.

Более точные оценки можно получить, используя кумулянты