

где $\|t - \theta\|_v = t - \theta$, $x(s)$ — промежуточная точка отрезка, соединяющего θ и t , $x(s) = (1-s)\theta + st$; так как $\rho_2 \leq \rho(\mathcal{F})$, то весь этот отрезок лежит внутри компакта $K(F) \subset \Theta$, и для третьей смешанной производной действует неравенство (11.15). Отсюда по (11.34) и (11.35)

$$g_{\xi\xi}''(t) \leq -1 + 1/4 + 1/2 = -1/4.$$

Выполнение этого неравенства для всех $t \in S^{(1)}(\theta)$ и всех направлений ξ — достаточное условие строгой вогнутости.

Лемма 11.11. В условиях леммы 11.10 при $N \geq N_2(\mathcal{F}) = = C[(2b)^{-8/3}] + 1$ всюду в шаре $S_b^{(2)}(\theta) \subset S^{(1)}(\theta)$,

$$S^{(2)}(\theta) = \{t : \|t - \theta\|_0 \leq b\},$$

$$b = [3 + 4\lambda^2(\mathcal{F})]^{-1} \min\{\rho_1(\mathcal{F}), \rho_2(\mathcal{F})\}, \quad (11.40)$$

выполнено неравенство

$$\forall t \in S^{(2)}(\theta), \quad g^{(N)}(\varepsilon; t) - g^{(N)}(\varepsilon; \theta) \geq -b^2, \quad (11.41)$$

а всюду на его поверхности

$$\forall t : \|t - \theta\| = b, \quad g^{(N)}(\varepsilon; t) - g^{(N)}(\varepsilon; \theta) \leq -b^2/24.$$

Следствие. В условиях леммы уравнение (11.23) максимального правдоподобия имеет в шаре $S^{(2)}(\theta)$ корень, притом единственный.

Для доказательства оценивается разложение θ -приведенной $g^{(N)}$:

$$\begin{aligned} g^{(N)}(\varepsilon; t) - g^{(N)}(\varepsilon; \theta) &= \|t - \theta\|^{N^k} g_j(\varepsilon; \theta) - \frac{1}{2} \|t - \theta\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \|t - \theta\|^2 {}^{N^k} g_{jk}(\varepsilon; \theta) + \delta_{jk} + \frac{1}{6} \|t - \theta\|^3 f_{vvv}''(\varepsilon; x(s)) \geq \\ &\geq -\frac{1}{2} b N^{-3/8} - \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{8} b^2 - \frac{1}{12} b^2 > -b^2, \end{aligned}$$

где кроме условий (10.33) — (10.35), мы воспользовались тем, что $\|t - \theta\|_0 \leq b \leq \rho_2 \leq (4\mathcal{K}^3)^{-1}$ и $N^{-3/8} \leq b/2$ при $N \geq N_2$. Аналогично, на поверхности шара

$$g^{(N)}(\varepsilon; t) - g^{(N)}(\varepsilon; \theta) \leq \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{8} b^2 + \frac{1}{12} b^2 = -b^2/24.$$

Поскольку в центре $t = \theta$ шара θ -приведенная логарифмическая функция правдоподобия обращается в нуль тождественно, то ее максимум неотрицателен и лежит внутри $S^{(2)}(\theta)$. По строгой вогнутости $g^{(N)}(\varepsilon; t)$ у нее других локальных максимумов или просто стационарных точек внутри этого шарового выпуклого множества быть не может.

Для наших целей нам необходимо локализовать положение корня системы уравнений максимального правдоподобия более точно.