

канонические экспоненциальные (см. ниже теорему 9.3), заданные на интервале $\theta' < t < \theta''$, иногда удобно замыкать, присоединяя предельные законы $p(\theta')$ и $p(\theta'')$. При этом выход на границу карты может быть трансверсальным.

Понятие L_2 -дифференцируемости принадлежит Гаеку [134] и Ле Каму [163]; по поводу ее L_r -обобщений см. [198]. Для совокупностей распределений вероятностей на конечных алгебрах \mathcal{A} их определения упрощаются. Условие непересечения границы карты для L_2 -дифференцируемых семейств приводит к ограничению

$$P_t\{\omega : (dP_t/dP_\theta)(\omega) = +\infty\} = o(|t - \theta|^2), \quad (9.7)$$

(см. [198]), т. е. к требованию

$$\forall i : p_i(\theta) = 0 \Rightarrow p_i(t) = o(|t - \theta|^2).$$

В определении S_2 -дифференцируемости требуется лишь, чтобы при $t = \theta$ существовали левая и правая производные функции $[p_i(t)]^{1/2}$ и отличались друг от друга только знаком (или одновременно обращались в нуль):

$$\forall i : p_i(\theta) = 0 \Rightarrow [\sqrt{p_i(t)} - |(t - \theta) z'_i(\theta)|] = o(|t - \theta|). \quad (9.8)$$

Заметим, что сферу S_n вещественного пространства \mathbf{R}^n можно изометрично погрузить в сферу S_n^* комплексного унитарного пространства \mathbf{C}^n с отображением в Car_n

$$z_i \rightarrow |z_i|^2/4, \quad i = 1, \dots, n; \quad z_1 z_1^* + \dots + z_n z_n^* = 4.$$

Возникающие возможности для дальнейшего обобщения теории могут оказаться полезными скорее в приложениях некоммутативной теории вероятностей (см. [24]), чем к классической статистике.

Приведем простой пример заданного аналитическими формулами семейства, которое S_2 -дифференцируемо всюду, но не всюду дифференцируемо L_2 .

Пример 8. Семейство триномиальных распределений вероятностей $\{P_\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi\} \subset \text{Car}_3$, где $P_0 = P_\pi$, проходящее через «точки» $(1/2, 0, 1/2)$ и $(0, 1/2, 1/2)$, и отвечающее большому кругу, проходящему (трансверсально к $\partial \Sigma_3^{(1/2)}$) через их образы $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ и $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ на S_3 , 2φ — длина Бхаттачария на сфере, отсчитываемая от первой из точек,

$$\begin{aligned} p_1(\varphi) &= \frac{2}{3} \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right), & p_2(\varphi) &= \frac{2}{3} \sin^2 \varphi, \\ p_3(\varphi) &= \frac{2}{3} \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (9.9)$$

с точками $P_\varphi \in \text{Car}_3$ при $\varphi = 0, = \pi/3, = 2\pi/3$.

Теорема 9.2. Пусть однопараметрическое семейство $\{P_t, \theta' < t < \theta''\} = \mathcal{P} \subset \text{Car}_n$ является L_1 -дифференцируемым при