

т. е. $P^N\{d\omega\} = P(d\omega^1) \cdot \dots \cdot P(d\omega^N)$. Тогда по закону больших чисел для любого события $A \in \mathcal{A}$ частота $\frac{v(A)}{N} \approx P(A)$, где $v_N(A) = \text{Card}\{\omega^k : \omega^k \in A, k=1, \dots, N\}$, причем точность и надежность (по P^N -вероятности) этого предсказания улучшаются с увеличением N . Задача предсказания частот является одной из основных в теории вероятностей и во многом определяет ее практическую ценность.

В математической статистике мы сталкиваемся с обратной задачей: нам дана последовательность независимых наблюдений $\omega^1, \dots, \omega^N$ какого-то случайного явления с известным качественным описанием (Ω, \mathcal{A}) , и требуется оценить «наблюдаемое» распределение P или какую-то его характеристику, либо выяснить наличие у этого неизвестного наблюдателю закона P тех или иных свойств. В первом случае говорят о задаче статистической точечной оценки, и именно она составляет предмет нашего рассмотрения.

Как уже отмечалось во введении, нетривиальные обратные задачи математической физики некорректны. Не составляет в этом отношении исключения и обратная задача теории вероятностей, если только измеримое пространство (Ω, \mathcal{A}) не дискретно. Сформулируем это высказывание для простейшей стандартной ситуации в точных терминах. Пусть $E = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ — единичный отрезок вещественной оси, \mathcal{B}^* — алгебра всех его борелевских и абсолютно лебеговских множеств, $\text{Car}(E, \mathcal{B}^*)$ — совокупность всех распределений вероятностей на измеримом пространстве (E, \mathcal{B}^*) . В нашей задаче всякое детерминированное решающее правило по N наблюдениям задается измеримым отображением $P_N^*(\cdot | \xi^1, \dots, \xi^N) : E^N \rightarrow \text{Car}(E, \mathcal{B}^*)$. За функцию потерь примем расстояние по вариации $|P_N^* - P| = d_V(P^*, P)$, см. (0.1).

Теорема 1.1. Какова бы ни была последовательность $P_N^*(\cdot | \xi^1, \dots, \xi^N)$ детерминированных правил $\Pi(N)$ обработки последовательных независимых наблюдений $\xi^1, \dots, \xi^N, \dots$ случайной величины ξ для определения ее неизвестного распределения вероятностей $P \in \text{Car}(E, \mathcal{B}^*)$, найдется такая случайная величина η с распределением $Q \in \text{Car}(E, \mathcal{B}^*)$, что риск

$$\int \dots \int d_V(Q(\cdot), P_N^*(\cdot | \xi^1, \dots, \xi^N)) Q(d\xi^1) \cdot \dots \cdot Q(d\xi^N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (1.1)$$

Другими словами, для указанной случайной величины η

$$Q^{(\infty)}\{d_V(P_N^*, Q) \neq 0\} > 0, \quad (1.2)$$

т. е. последовательность решающих правил $\Pi(N)$ не состоятельна для оценки Q в сильной метрике.

Поскольку совокупность $\text{Car}(E, \mathcal{B}^*)$ выпукла и норма разности $d_V(P, P^*)$ тоже выпукла, то для любого рандомизирован-