

ли и соответствующие натуральные статистические параметризации связаны в области G соотношениями

$$H_F(s) = H(s) + \ln P_s(F), \quad (7.35)$$

$$t^F(s) = t(s) + \text{grad} \ln P_s(F). \quad (7.36)$$

З а м е ч а н и е. Исходная точная каноническая параметризация s на семействе \mathcal{P}^F может оказаться неточной. Зато \mathcal{P}^F может оказаться регулярным семейством при нерегулярном \mathcal{P} .

С каждым нерегулярным каноническим экспоненциальным семейством можно связать целую направленную систему семейств усечений (7.32), сходящихся к \mathcal{P} , и проследить за поведением функций (7.36), чтобы правильно определить множество t , приписываемых точке $\text{sed}G$, см. выше замечание по поводу примеров 5 и 6.

Следующее свойство является главным, выделяющим экспоненциальные семейства из класса ∇ — вполне геодезических семейств при других инвариантных связностях с $\gamma \neq 0$.

Т е о р е м а 7.7. Пусть $\mathcal{P}^N = \{P_s^N(\cdot)\}$ — семейство распределений вероятностей для последовательностей N независимых исходов $(\omega^1, \dots, \omega^N) = \varepsilon$, распределенных каждый по одному и тому же распределению $P_s(\cdot)$ из канонического экспоненциального семейства \mathcal{P} , см. (0.11) или (7.1). Тогда семейство \mathcal{P}^N также является каноническим экспоненциальным с той же канонической параметризацией s , с направляющей вектор-статистикой

$$q_j(\varepsilon) = q_j(\omega^1) + \dots + q_j(\omega^N), \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad (7.37)$$

и нормирующим делителем $\exp[NH(s)]$,

$$H_N(s) = NH(s). \quad (7.38)$$

Соответствующий натуральный статистический параметр есть

$$t^N(s) = Nt(s). \quad (7.39)$$

Распределение R_s^{*N} вектор-статистики $q(\varepsilon)$ является N -кратной композицией редукций R_s ,

$$R_s^{*N} = R_s * \dots * R_s, \quad (7.40)$$

$$G(\mathcal{P}^N) = G(\mathcal{P}), \quad C(\mathcal{P}^N) = NC(\mathcal{P}). \quad (7.41)$$

Проверка всех утверждений теоремы элементарна, только при доказательстве последнего из равенств (7.41) надо воспользоваться техникой *опорных плоскостей*, см. [34, § 21]. Заметим, что хотя сами носители растут линейно, происходит концентрация вероятностной меры вокруг точки $Nt(s)$, она становится асимптотически нормальной со скоростью расплывания $N^{1/2}$. Происходит также «размазывание» сингулярных мер (см. [4], также [34]) на весь выпуклый носитель.

Рассмотрим, наконец, задачу оценивания параметра канонического экспоненциального семейства \mathcal{P} по наблюдению ω или