

ции потерь $2I(P : P^*)$ к максимуму функции риска

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}_{\Lambda(N)}(P) = O(N^{-1} \cdot \Gamma(N)), \quad (12.52)$$

где $\Gamma(y/g(y)) = y, \forall y > 0$.

Доказательство теоремы основано на леммах 12.12 и 12.10. Применяя решение по методу \mathcal{F} -максимального правдоподобия, мы как бы разбиваем ошибку оценки на две части: систематическую, связанную с уклонением \mathcal{P} от \mathcal{F} , и случайную, связанную с уклонением оценки от проекции P на \mathcal{F} . Заметим, что в силу выпуклости \mathcal{P} , систематическая ошибка всегда прибавляется к случайной.

Теорема 12.14. Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — логарифмически выпуклое квазиоднородное семейство распределений вероятностей и пусть квадраты $\rho_n^2(\mathcal{P})$ его внутренних информационных радиусов убывают не быстрее, чем $g(n)$, т. е. при некоторых $a, b > 0$

$$\rho_n^2(\mathcal{P}) > b \cdot g(an),$$

начиная с некоторого n , причем характеристика скорости убывания удовлетворяет требованиям (12.17).

Тогда существует такая константа $\kappa > 0$, что, начиная с некоторого $N = N_0$, для любого решающего правила $\Pi = \Pi(N)$ определения распределения вероятностей $P \in \mathcal{P}$ по независимой выборке объема N и функции потерь $2I(P : P^*)$ максимум функции риска

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}_{\Pi(N)}(P) \geq \kappa(\mathcal{P}) N^{-1} \cdot \Gamma(N), \quad (12.53)$$

где $\Gamma(y/g(y)) = y, \forall y > 0$.

Доказательство теоремы основано на лемме 12.11. Так как диск \mathcal{K} логарифмически выпукл и компактен, то мы для $P \in \mathcal{K}$ только улучшим оценку, спроектировав ее на \mathcal{K} и сведя дело к оценке параметра.

Теорема 12.15. Пусть квадраты $\delta_n^2(\mathcal{P})$ n -мерных информационных поперечников и квадраты $\rho_n^2(\mathcal{P})$ n -мерных внутренних информационных радиусов ограниченного логарифмически выпуклого квазиоднородного семейства \mathcal{P} убывают с одинаковой скоростью $g(n)$, удовлетворяющей требованиям (12.17).

Тогда в схеме независимых испытаний

$$\inf_{\{\Pi(N)\}} \sup_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}_{\Pi(N)}(P) \asymp N^{-1} \cdot \Gamma(N),$$

где $\Gamma(z)$ определено (12.18). При этом можно указать \mathcal{F}_N -аппроксимативные оценки максимального правдоподобия с компактными выпуклыми экспоненциальными подсемействами \mathcal{F}_N , оптимальные по порядку точности (т. е. если и хуже другой по величине максимума риска, то не более, чем в ограниченное число раз).