

ного семейства $\mathcal{G} = \{P_s, s \in G\} \subset \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{X})$ с R -ортонормированными направляющими статистиками $q_j(\omega)$,

$$\mathbf{E}_R q_j(\omega) = 0, \quad \mathbf{E}_R q_j(\omega) q_k(\omega) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (12.44)$$

Пусть, далее, выпуклый компакт $F \subset \text{Int } G$, P_z — «проекция» распределения R на \mathcal{F} в смысле определения 8.2, см. (8.20), где $I(\mathcal{F} : R) < \infty$. Пусть, наконец, $\sigma = \sigma(\omega^1, \dots, \omega^N)$ — оценка F -максимального правдоподобия, т. е.

$$\sigma = \arg \max_F [\ln p(\omega^1; s) + \dots + \ln p(\omega^N; s)].$$

Тогда

$$\|\sigma - z\|^2 \leq C(\mathcal{F}) \|N^{-1}[q(\omega^1) + \dots + q(\omega^N)]\|, \quad (12.45)$$

где $\|s\|^2 = s^j s^k \delta_{jk}$, $\|t\|^2 = t_j t_k \delta^{jk}$, $C(\mathcal{F})$ — константа квазиоднородности семейства \mathcal{F} .

Следствие. В схеме независимых испытаний с распределением R^N

$$\mathbf{E}_R^{(N)} \|\sigma - z\|^2 \leq C(\mathcal{F}) n N^{-1}.$$

Доказательство. По теореме 7.10 оценка F -максимального правдоподобия σ существует и единственна. По теореме 8.8 существует и однозначно определена «проекция» P_z . Сделаем такое ортогональное преобразование канонических координат, чтобы отрезок с концами σ и z стал параллельным первой координатной оси, т. е. $\sigma^2 = z^2, \dots, \sigma^n = z^n, \sigma^1 \geq z^1$. Из определения (0.11) нетрудно подсчитать, что

$$I(P_s : R) = I(P_0 : R) - s^j \mathbf{E}_R q_j(\omega) + H(s) - H(0), \quad (12.46)$$

т. е. «проекция» P_z должна минимизировать на F выпуклую аналитическую функцию $H(s)$, ибо $\mathbf{E}_R q_i(\omega) = 0$. Аналогично, оценка P_σ должна минимизировать на F выпуклую же аналитическую функцию

$$\Lambda(s) = H(s) - s^j \tau_j = N^{-1} [\ln p(\omega^1; s) + \dots + \ln p(\omega^N; s)],$$

где для сокращения обозначено $\tau = N^{-1}[q(\omega^1) + \dots + q(\omega^N)]$. Из необходимого условия минимума на отрезке $z^1 \leq s^1 \leq \sigma^1$, соединяющем точки $\sigma, z \in F$, получаем перекрестно $(\partial/\partial s^1) H(s) |_{s=\sigma} = T_1(\sigma) \leq 0$; $(\partial/\partial s^1) \Lambda(s) |_{s=z} = T_1(z) - \tau_1 \geq 0$, где $t = T(s)$ — сопряженный натуральный статистический параметр. Из полученных неравенств следует, что $T_1(\sigma) - T_1(z) \leq -\tau_1$. Отсюда по лемме 12.6 получаем $C^{-1}(\sigma^1 - z^1) \leq |\tau_1|$, что дает (12.45), поскольку все остальные координаты совпадают.

Лемма 12.11. Пусть s — стандартная каноническая параметризация канонического экспоненциального семейства $\mathcal{P} = \{P_s, s \in G\}$ с началом $P_0 \in \text{Int } \mathcal{P}$ и P_0 -ортонормированными по (12.44) направляющими статистиками $q_j(\omega) = q_j(\omega; 0)$, $v_{jk}(0) = \delta_{jk}$. Предположим, что шаровое подсемейство $\mathcal{P}_r = \{P_s, s : \|s\|_0 < r\} \subset \text{Int } \mathcal{P}$.

Тогда для любой вектор-статистики $\zeta(\omega^1, \dots, \omega^N)$, построенной по выборке объема N и такой, что $P_s^N \{\|\zeta\|_0 \leq r\} = 1$,