

в соответствии со знаком равенства или неравенства в

$$\Phi = [\gamma(1-\gamma)]^{-1} \int_{\Omega} \{[R(d\omega)]^{1-\gamma} - [Q(d\omega)]^{1-\gamma}\} \times \\ \times \{[P(d\omega)]^{\gamma} - [Q(d\omega)]^{\gamma}\} \geq, =, \leq 0. \quad (8.17)$$

Доказательство. Левые части в (8.16) и (8.17) тождественно равны. Для распределений на бесконечных алгебрах нужны оговорки, учитывающие возможность появления неопределенностей типа $\infty - \infty$. При конечных алгебрах они не возникают, если выполнена оговорка в формулировке теоремы.

В случае, когда «скалярное произведение» $\Phi = \Phi_{\alpha}(P, Q, R) = 0$ в смысле (8.17), получается аналог несимметричной теоремы Пифагора для относительной энтропии (информации Кульбака), [32]. Отсюда вытекает важное следствие.

Теорема 8.6. Пусть \mathcal{P} — каноническое вполне ∇^{α} -геодезическое семейство распределений $\mathcal{P} \subset \text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$, R — взаимно абсолютно непрерывно с \mathcal{P} . Если для всех $P \in \mathcal{P}$ при некотором $Q \in \mathcal{P}$

$$\Phi_{\alpha}(P, Q, R) = 0, \quad (8.18)$$

и $D_{\alpha}(Q, R) < \infty$, то

$$Q = \arg \min_{\mathcal{P}} D_{\alpha}(P, R), \quad (8.19)$$

и $D_{\alpha}(P, R) > D_{\alpha}(Q, R)$ при $Q \neq P \in \mathcal{P}$.

Такое Q естественно назвать α -проекцией R на \mathcal{P} .

Следует, однако, отметить, что «скалярное произведение» в (8.17) имеет смысл и для ненормированных мер. При $\alpha \neq \pm 1$ оно не совпадает с местным скалярным произведением по Фишеру для соответствующих касательных векторов в точке Q , отличаясь от него дополнительными слагаемыми (ср. запись (8.3), а также (6.33)). Именно поэтому $\frac{1}{2} D_0(P, Q)$ совпадает с $d_n(P, Q)$ — квадратом длины «хорды» по Хеллингсону, а не, скажем, сферической дуги Фишера—Бхаттачария—Рао. Только при $\alpha = \pm 1$ «скалярное произведение» Φ совпадает со скалярным произведением T_Q -касательного вектора к α -геодезической, идущей из Q в P с T_Q -касательным вектором — α -геодезической, идущей из Q в R . Это обстоятельство, а также отсутствие аддитивности (см. лемму 8.4) снижает интерес к общей теории α -дивергенций.

Обратимся поэтому к задачам проектирования при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ ($\alpha = \pm 1$), когда в роли дивергенции выступает информационное количество Кульбака с тем или обратным порядком аргументов.

Определение 8.2. Пусть задано $R \in \text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$ и каноническое экспоненциальное семейство $\mathcal{P} = \{P_{\theta}\} \subset \text{Car}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{Z})$ с общим идеалом \mathcal{Z} нуль-множеств. **Задача Б информационного проектирования** состоит в отыскании «проекции» $R_{\mathcal{P}} = P_{\theta}$. «точ-