

ства (9.9) примера 8, где

$$\forall \varphi \neq 0, \pi/3, 2\pi/3, I(\varphi) = 4 = (ds/d\varphi)^2,$$

$$I(0) = I(\pi/3) = I(2\pi/3) = 4/3 < 4.$$

Сходная ситуация может иметь место и в концевых точках семейства при односторонней L_r -дифференцируемости в смысле, указанном в замечании 2. Важный простейший случай разобран ниже, см. пример 9.

Сделаем еще одно замечание. В случае L_r -дифференцируемости соблазнительно воспользоваться неравенством Гельдера вместо неравенства Коши, но это будет принципиально другое неравенство, с другим «количеством», уже не аддитивным в схеме независимых испытаний.

Теорема 9.3. Пусть $\{P_t, \theta' < t < \theta''\} = \mathcal{P} \subset \text{Cap}_n$ есть однопараметрическое семейство вероятностных мер, L_1 -дифференцируемое во всей области задания, и пусть параметр t допускает *эффективную оценку* $q(\omega)$, т. е. *несмещенную оценку*, обращающую неравенство информации (9.17) в равенство. Тогда

1°. Семейство \mathcal{P} является каноническим однопараметрическим экспоненциальным семейством (или его интервальным подсемейством) с направляющей статистикой $\mathbf{q}(\omega)$ и некоторой канонической параметризацией s . Параметр t является натуральным статистическим параметром семейства, двойственным s . Все меры P_t взаимно абсолютно непрерывны и сосредоточены на подмножестве $E \subseteq \Omega$ — объединении всех атомов, имеющих строго положительную вероятность.

2°. Семейство $\{P_t\}$ определено (или может быть доопределено) для всех значений параметра t в интервале

$$t^- = \min_E q(\omega) < t < \max_E q(\omega) = t^+. \quad (9.21)$$

3°. Оно может быть пополнено предельными распределениями семейства (двумя его инфинитными «концами»). Последние сосредоточены соответственно на

$$E^{(-)} = \{\omega' : q(\omega') = \min_E q(\omega)\},$$

$$E^{(+)} = \{\omega' : q(\omega') = \max_E q(\omega)\},$$

и им отвечает значение информации по Фишеру

$$I(t^-) = I(t^+) = +\infty. \quad (9.22)$$

При $t = t^\pm$ условие (9.6) выполнено не полностью — только для множества индексов $K = \{k : A_k \subset \Omega - E\}$, а не $K^\pm = \{k : A_k \subset \subset \Omega - E^\pm\}$, так что подсчет по правой сумме (9.12) дает в соответствии с замечанием 2 значение $I(t^\pm) = \infty$, совпадающее с пределами $I(t)$ при $t \rightarrow t^\pm$.

4°. При всех значениях t , $t^- \leq t \leq t^+$ оценка $q(\omega)$ эффективна, а при $t = t^\pm$ даже достоверна.

Доказательство. Выберем из семейства меру P_{t^*} , сосредоточенную на максимальном количестве атомов; пусть это