

4°. Какова бы ни была \mathcal{A} -измеримая статистика $f(\cdot)$ на Ω , либо $E_\theta[f(\omega) - \theta]^2 = +\infty$, либо в некоторой окрестности $\theta \in \Theta$, существует и непрерывно дифференцируемо по t математическое ожидание $m(t) = E_t f(\omega)$,

$$\zeta^j m'_j(t) = \int_{\Omega} \zeta^j P'_j(d\omega | t) = \zeta^j E_t q_j(\omega; t). \quad (10.5)$$

Первое из утверждений 3° леммы является следствием условий 1° и 3° определения. Отсюда и из того, что $P_\theta(\cdot)$ по лемме 9.6 есть локальная доминанта мер $P_t(\cdot)$, следует 1°. Формула (10.5) утверждения 4° вытекает из условия из 1° по теореме 9.7, а непрерывность — из условия 3°. Существование слабого интеграла для $P(\cdot | t)$ вытекает из доказанной непрерывности $P(A | t)$, а $\mathcal{L}^{(2)}(P_\theta)$ -сходимости сумм — из условия 3°. Отсюда (см. [34]) для каждой точки $\theta \in \Theta$ и $\eta > 0$ существует малая окрестность $O_{\theta\eta}$, в которой

$$\forall x, y \in O_{\theta\eta}, \quad \left| \frac{\|P(x) - P(y)\|_\theta}{\|(x^j - y^j) P'(\theta)\|_\theta} - 1 \right| < \eta.$$

Сходным образом выводится существование интеграла для $\ln P(A | t)$. Утверждение 2° вытекает из (10.4) ввиду связи

$$\|\zeta^j P'_j(t)\|_t^2 = \zeta^j \zeta^k \langle P'_j(t), P'_k(t) \rangle_t = \zeta^j \zeta^k E_t q_j(\omega; t) q_k(\omega, t). \quad (10.6)$$

Таким образом, здесь использована возможность представлять тензор информации Фишера на двух картах $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(0)}$:

$$\omega_{jk}(t) = \langle P'_j(t), P'_k(t) \rangle_t = E_t q_j(\omega; t) q_k(\omega; t). \quad (10.7)$$

Когда производные взяты в разных точках, справедливо равенство, обобщающее (10.7):

$$\langle P'_j(x), P'_k(y) \rangle_y = E_x q_j(\omega; x) q_k(\omega; y). \quad (10.8)$$

Лемма 10.2. Пусть $\{P_t(\cdot), t \in \Theta\}$ есть $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство, $\theta \in \Theta$. Тогда для любого $\eta > 0$ существует ее достаточно малая окрестность $O_{\theta\eta}$, в которой

$$\forall x, y \in O_{\theta\eta}, \quad \forall \zeta \neq 0, \quad \left| \frac{\zeta^j \zeta^k \langle P'_j(x), P'_k(y) \rangle_y}{\zeta^j \zeta^k \langle P'_j(\theta), P'_k(\theta) \rangle_\theta} - 1 \right| < \eta. \quad (10.9)$$

Следствие. Если в точке $t = \theta$ тензор Фишера $\omega_{jk} = \delta_{jk}$, то в этой окрестности,

$$|\omega_{jk}(t) - \delta_{jk}| < \eta, \quad (10.10)$$

а если η достаточно мало, то и

$$|[\det W(t)]^{1/2} - 1| < B_n \eta, \quad (10.11)$$

где константа B_n зависит только от n .