

последовательности независимых наблюдений $(\omega^1, \dots, \omega^N) = \varepsilon$ с помощью метода максимального правдоподобия.

Теорема 7.8. 1°. Логарифмическая функция правдоподобия

$$\ln p(\omega; s) = s^j q_j(\omega) - H(s) - \ln p(\omega; 0) \quad (7.42)$$

для семейства \mathcal{P} с точной канонической параметризацией s строго вогнута во всей области $G = \text{Dom } \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^m$ определения семейства \mathcal{P} . Будучи продолжена значением $\ln p(\omega; s) = -\infty$ всюду вне G , она превращается в полунепрерывную сверху вогнутую функцию на \mathbb{R}^m и имеет на G не более одного максимума.

2°. Если этот максимум достигается при значении $s = \sigma \in \text{Int } G$, то σ является корнем *уравнения* (точнее, системы m уравнений) *максимального правдоподобия*

$$q(\omega) - \text{grad } H(s) = 0 \quad (7.43)$$

или, если преобразование Лежандра $T: s \rightarrow t$ перейти к двойственной натуральной статистической параметризации, имеет корень

$$T(\sigma) = \tau = q(\omega). \quad (7.44)$$

3°. На подсемействе $\text{Int } \mathcal{P} = \{P_s(\cdot), s \in \text{Int } G\}$, перепараметризованном двойственным параметром t , вектор-статистика $q(\omega)$ задает несмещенную и эффективную его оценку

$$E_t q(\omega) = t, \quad (7.45)$$

$$(\text{Cov}_t [q_j(\omega), q_k(\omega)]) = (I_{jk}(t))^{-1}. \quad (7.46)$$

Беда, однако, состоит в том, что для многих семейств \mathcal{P} с положительной вероятностью корень (7.44) уравнения максимального правдоподобия может не принадлежать области $C^1(\mathcal{P})$ значений натурального статистического параметра семейства \mathcal{P} .

Для нерегулярных канонических экспоненциальных семейств это явление обязательно имеет место. Для экспоненциальных семейств распределений на конечных алгебрах (являющихся обязательно регулярными) значения $\tau \in \partial C$ удается интерпретировать как натуральные статистические параметры предельных для семейства распределений. Возможные пути интерпретации формальных корней для некоторых нерегулярных семейств обсуждены выше в связи с теоремой 7.6.

Теорема 7.9. Уравнение максимального правдоподобия для канонического семейства \mathcal{P}^N приводится к виду

$$N^{-1}[q(\omega^1) + \dots + q(\omega^N)] = T(\sigma). \quad (7.47)$$

Так как при любом $s \in \text{Int } G$ и $N \rightarrow \infty$ P_s^N -распределение значений левой части в (7.47) концентрируется вокруг $t = T(s)$, то

$$P_s^N \{\tau \in C^1\} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty. \quad (7.48)$$

Впрочем, можно ограничиться настоящими оценками макси-