

Отличие (11.31) от (11.30) состоит в том, что из исходного неравенства  $|q_{jk}(\omega; \theta)| < h^{(0)}(\omega)$  еще надо получить оценку для центрального момента, т. е. момента от статистик  $q_{jj}(\omega; \theta) + 1$ ; аналогичное замечание надо сделать относительно (11.32).

**Лемма 11.9.** Пусть  $\mathcal{F} = \{P_t, t \in F\}$  есть 3-гладкое компактное подсемейство,  $g^{(N)}(\varepsilon; t)$  — логарифмическая функция правдоподобия в схеме  $N$  независимых испытаний  $(\omega^1, \dots, \omega^N) = \varepsilon$ . Введем события

$$U_1(N) = \left\{ \varepsilon : \sum_j [g_j(\varepsilon; \theta)]^2 \leq \frac{1}{4} N^{-3/4} \right\}, \quad (11.33)$$

$$U_2(N) = \left\{ \varepsilon : \sum_{jk} [g_{jk}(\varepsilon, \theta) + \delta_{jk}]^2 \leq 1/16 \right\}, \quad (11.34)$$

$$U_3(N) = \left\{ \varepsilon : \sum_i [h(\omega^i)]^3 \leq 2\mathcal{H}^3 N \right\}, \quad (11.35)$$

$$V(N) = U_1(N) \cap U_2(N) \cap U_3(N); \quad W(N) = \Omega^N - V(N).$$

Тогда

$$P_0^N(W(N)) \leq B_2 N^{-3/2}, \quad (11.36)$$

$$B_2(n, \mathcal{H}) = 2^{12} C(12) n^6 \mathcal{H}^{12} + 2^9 C(4) n^4 \mathcal{H}^8 + 2^3 C(4),$$

и при  $N \geq N_1 = C[(2B_2)^{2/3}] + 1$  для любой неотрицательной функции  $f(\varepsilon)$  условное математическое ожидание

$$P_0^N\{V(N)\} E_0^{(N)}[f(\omega) | V(N)] \leq E_0^{(N)} f(\omega); \quad (11.37)$$

$$E_0^{(N)}[f(\omega) | V(N)] \leq (1 + 2B_2 N^{-3/2}) E_0^{(N)} f(\omega).$$

**Доказательство.** Оценки  $P_0^N$ -вероятностей событий  $U_i$  получаются из оценок (11.30) — (11.32) центральных моментов соответственно при  $m=6$ ,  $m=2$  и  $m=2$ . Для оценки условного ожидания заметим, что при  $f(\omega) \geq 0$

$$\begin{aligned} E^{(N)}[f(\varepsilon) | V] &= [P^N(V)]^{-1} \int_V f(\varepsilon) P^N(d\varepsilon) \leq \\ &\leq [P^N(V)]^{-1} E^{(N)} f(\varepsilon). \end{aligned} \quad (11.38)$$

**Лемма 11.10.** Пусть  $\mathcal{F}$  есть 3-гладкое компактное подсемейство,  $P_\theta \in \mathcal{F}$ . При каждом  $\varepsilon \in V(N)$  логарифмическая функция правдоподобия  $g^{(N)}(\varepsilon; t)$  строго вогнута в шаре

$$\begin{aligned} S^{(1)}(\theta) &= \{t : \|t - \theta\|_0 \leq \rho_2(\mathcal{F})\}, \\ \rho_2(\mathcal{F}) &= \min\{\rho(\mathcal{F}), (4\mathcal{H}^3)^{-1}\} \end{aligned} \quad (11.39)$$

**Доказательство.** Вычислим вторую производную по фиксированному направлению  $\zeta$ ,  $\|\zeta\|_0 = 1$ , в точке  $t$  шара:

$$\begin{aligned} g''_{\zeta\zeta}(t) &= \zeta^j \zeta^k g_{jk}(t) = \zeta^j \zeta^k g_{jk}(\theta) + \|t - \theta\| g'''_{\zeta\zeta\nu}(\varepsilon; x(s)) \leq \\ &\leq -1 + \zeta^j \zeta^k [g_{jk}(\varepsilon; \theta) + \delta_{jk}] + \|t - \theta\| N^{-1} \sum [h^{(0)}(\omega^i)]^3, \end{aligned}$$