

Если значение формы (5.3) не совпадает с обобщенным значением первой из форм (5.5), неравенство информации использует форму (5.3).

6°. Риманову длину (0.9) по Бхаттачария между P и Q задают обе эти формы, причем их несовпадение возможно только в самих концевых точках P и Q связывающей их геодезической дуги, так что инвариантная риманова метрика единственна.

Заметим, что неэквивалентность и несовпадение (5.5) и (5.3) может иметь место в точках вырождения даже для семейств мультиномиальных распределений с конечными алгебрами \mathcal{A} событий (см. ниже пример 8 в § 9 и неравенство (9.20)).

Добавим для полноты, что в некоммутативной теории вероятностей аналоги (с заменой интеграла на след) всех трех записей уже не эквивалентны и определяют каждая свою инвариантную риманову метрику, совпадающую с классической для коммутирующих «распределений вероятностей» (см. доказательство инвариантности в [15], а также [168]).

Наметим путь доказательства теоремы 5.2, которая, в силу сделанных определений, влечет справедливость теоремы 5.1. При этом, поскольку марковские морфизмы Π линейны, а совокупности $\text{Car}(\Omega, \mathcal{A}_n)$ — выпуклы, мы будем в конечномерном случае стандартным образом отождествлять для каждой внутренней «точки» P , заданной по (0.4) касательное пространство с гиперплоскостью $p_1 + \dots + p_n = 0$, а действие $\delta\Pi$ — с действием Π на ней.

Определение 5.1. Распределение вероятностей $P \leftrightarrow (p_1, \dots, p_n)$ на конечной алгебре \mathcal{A}_n событий назовем *арифметическим*, если вероятности $p_i = P(A_i)$ всех атомов — рациональные числа

$$(p_1, \dots, p_n) = (k_1 m^{-1}, \dots, k_n m^{-1}). \quad (5.6)$$

Заметим, что арифметическими являются, например, эмпирические распределения P^* , построенные по выборке $(\omega^1, \dots, \omega^N)$ — конечного объема N

$$P^*(A) = N^{-1} \text{Card} \{\omega^i : \omega^i \in A\}.$$

Лемма 5.3. Если на всех строго положительных арифметических распределениях вероятностей задана квадратичная форма $g^{ij}(P) dp_i dp_j$, инвариантная относительно категории марковских отображений,

$$\forall (P, dP) \sim (Q, dQ), \quad g^{ij}(P) dp_i dp_j = g^{kl}(Q) dq_k dq_l, \quad (5.7)$$

то для P , заданного (5.6), она может быть записана в виде

$$C[(m/k_1)(dp_1)^2 + \dots + (m/k_n)(dp_n)^2] \quad (5.8)$$

с общим для всех P постоянным множителем C , отличающим ее от формы (0.5).