

§ 13. Геометризация статистической теории (краткий библиографический обзор)

В настоящее время разработка геометрических подходов в математической статистике и исследование геометрических аспектов статистической теории интенсивно развивается по целому ряду направлений, в первую очередь связанных с задачами параметрического оценивания. Эти исследования не только обогатили арсенал статистических методов, но и, в свою очередь, индуцировали дальнейшее развитие аппарата самой дифференциальной геометрии, которое может оказаться интересными в связи с приложениями не только к статистике, но и к физике. Работы в этом направлении по теории стрингов (струн, но не в смысле хромодинамики) были начаты О. Е. Барндорф—Нильсеном и продолжаются им совместно с коллективом сотрудников, [58], [61], [64], [68]—[71], [88]—[91]. Сюда же примыкают их работы по (средне-) ожидаемой и наблюдаемой геометриях, диктуемых (см. § 11) функцией правдоподобия и ее обобщениями [57], [74], [86]—[88], [90], [167], ср. также [154], [160], [166]. Более подробно с ними можно познакомиться по программным статьям [59]—[69], [64], [73] и монографиям [63], [72], ср. [125], [126].

За последние двадцать лет получили большое развитие исследования по определению естественных пределов применимости неравенства информации. Кроме основополагающих работ [106], [111], [129], [179], мы упомянули здесь лишь некоторые [41], [119], [142], [180], [197], [198]; см. более подробную библиографию этих работ в [198]. Ссылки на более ранние исследования, включая доказательства Рао и Ченцова неравенства информации для оценок, являющихся дифференцируемыми функционалами от эмпирической функции распределения, даны в [34].

Важный этап в развитии геометростатистики (впервые этот термин был употреблен А. Н. Колмогоровым по отношению к предмету монографии [34]) начался с работы Эфрона [115], в которой в теорию асимптотически оптимального статистического оценивания было введено понятие кривизны статистической модели. Дальнейшему развитию этого направления, которое не отражено в нашем обзоре, посвящены [45], [48], [54], [175], [116], [158], [174], [177], см. также [82] и достаточно подробный обзор этого направления в [153]. Кроме того, здесь необходимо упомянуть более ранние исследования, начатые С. Р. Рао [180]; см. также [183], [1]. Однако, как нам представляется в контексте § 10 (см. выше пример 10), точка в теории эффективных по второму порядку оценок еще не поставлена.

Развитие дифференциально-геометрических методов математической статистики во многом связано с исследованиями Ш.—и. Амари, который объединил в своем лице геометра и специалиста по теории информации. Среди его работ, кроме упомянутых в разных местах настоящего обзора, следует отме-