

В терминах функции $\Gamma(N)$ мы можем описать оптимальное по порядку убывания нормы погрешности при $N \rightarrow \infty$ решающее правило построения $\pi_{v(N), N}^*$.

Теорема 12.2. Пусть неизвестная плотность $p(\cdot) \in \mathcal{L}^2(r)$ и пусть дана последовательность аппроксимирующих подпространств \mathcal{E}_n такая, что априори $\|p_n(\cdot) - p(\cdot)\|^2(g(n))$, т. е.

$$b \cdot g(an) \leq \|p_n(\cdot) - p(\cdot)\|^2 \leq B \cdot g(An) \quad (12.19)$$

при некоторых $A \geq a > 0$, $B \geq b > 0$, и пусть, кроме того,

$$n^{-1} [E_P |\alpha_{1n}|^2 + \dots + E_P |\alpha_{nn}|^2] \asymp 1, \text{ т. е.}$$

$$h \leq n^{-1} E_P \{[\varphi_{1n}(\omega)r(\omega)]^2 + \dots + [\varphi_{nn}(\omega)r(\omega)]^2\} \leq H \quad (12.20)$$

при некоторых $H > h > 0$. Тогда

1°. Если в (12.19) и (12.20) выполнены правые неравенства, то можно выбрать по числу N наблюдений размерность $n = v(N) \asymp \Gamma(N)$ аппроксимации так, чтобы при некоторой константе C , $0 < C < \infty$, для проекционной оценки

$$E_P^{(N)} \|\pi_{v(N), N}^*(\cdot) - p(\cdot)\|^2 \leq CN^{-1} \cdot \Gamma(N). \quad (12.21)$$

2°. Если в (12.19) и (12.20) выполнены левые неравенства, то как бы ни выбирать порядок n аппроксимации, существует константа c , $0 < c < \infty$ такая, что

$$cN^{-1} \cdot \Gamma(N) \leq E_P^{(N)} \|\pi_{nN}^*(\cdot) - p(\cdot)\|^2. \quad (12.22)$$

Заметим, что условие (12.20) инвариантно относительно выбора базиса в \mathcal{E}_n . Кроме того, поскольку $0 \leq |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq \|p(\cdot)\|^2$, то записанное инвариантным образом условие (12.20) обеспечивает слабую эквивалентность $[Var_{p\alpha_1} + \dots + Var_{p\alpha_n}] \asymp n$.

Теорема 12.2 позволяет установить, в частности, порядок уклонения в метрике $\mathcal{L}^2(r)$ гистограммы случайной величины от графика плотности, когда эта плотность имеет ограниченную вторую производную и т. п., см. [34] и библиографию там.

Рассмотрим теперь более общую задачу восстановления плотности по наблюдениям, о которой шла речь в начале параграфа. Задано своими плотностями априорное бесконечномерное семейство \mathcal{P} распределений вероятностей, причем размеры «тела» \mathcal{P} в метрике $\mathcal{L}^2(r)$ известны. Требуется указать \mathcal{P} -равномерно наиболее точный способ $\mathcal{L}^2(r)$ -оценивания плотности по наблюдениям.

Здесь следует объяснить, какими геометрическими характеристиками разумно описывать размеры компактного тела в линейном нормированном пространстве \mathcal{L} . Расстоянием $\rho(x, G)$ от точки x до множества G и отклонением $\delta(F, G)$ множества F от множества G называют величины

$$\rho(u, G) = \inf_{v \in G} \|u - v\|, \quad \delta(F, G) = \sup_{u \in F} \rho(u, G).$$