

Поскольку на отрезке Car_2 (см. (3.15)) $X_1 = -X_2$, то по симметрии и свойствам (6.4) и (6.5)

$$\eta^{(2)}X_1 = \nabla_{X_1}(X_1) = \nabla_{X_2}(X_2) = \eta^{(2)}X_2 = -\eta^{(2)}X_1 \Rightarrow \eta^{(2)} = 0.$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что для $P = P_n$

$$\nabla_{X_k}(X_j) = \alpha^{(n)}X_j + \beta^{(n)}X_k, \quad (6.22)$$

с α и β , не зависящими от j и k . Найдем две связи между α , β и η , воспользовавшись (6.14)

$$0 = \nabla_{X_k}(\Sigma X_j) = \alpha(-X_k + \Sigma X_j) + (n-1)\beta X_k + \eta X_k = \\ = [\eta - \alpha + (n-1)\beta] X_k,$$

$$0 = \nabla_{\Sigma X_k}(X_j) = \alpha(n-1)X_j + \beta(-X_j + \Sigma X_k) + \eta X_j = \\ = [\eta + (n-1)\alpha - \beta] X_j,$$

откуда следует, что коэффициенты при X_j и X_k равны нулю. Решая получившуюся систему, имеем

$$\alpha^{(n)} = \beta^{(n)} = (n-2)^{-1}\eta^{(n)}. \quad (6.23)$$

Рассмотрим теперь эквивалентное вложение симплекса Car_n в Car_{nv} , задаваемое формулами (5.10). Базисные касательные вектора X_i в точке P_n при таком вложении Φ отвечают суммам:

$$X_i \xrightarrow{\Phi} X'_{i(v-1)+1} + \dots + X'_{iv} = X_i^{d\Phi} = Y_i. \quad (6.24)$$

Тогда, после тождественных преобразований ввиду эквивариантности ∇ , получаем

$$\eta^{(n)}Y_1 = \nabla_{Y_1}(Y_1) = \eta^{(nv)}[1 - (2v-2)(nv-2)^{-1}]Y_1,$$

что дает связь между $\eta^{(n)}$ и $\eta^{(nv)}$:

$$\frac{n}{n-2} \eta^{(n)} = \frac{nv}{nv-2} \eta^{(nv)} = \frac{v}{v-2} \eta^{(v)}, \quad \forall n, v=3, 4, 5, \dots$$

Обозначая это общее, не зависящее, очевидно, от n значение через γ , получаем с учетом (6.20).

$$\eta^{(n)} = \gamma(1-2n^{-1}), \quad \alpha^{(n)} = \beta^{(n)} = \gamma n^{-1}. \quad (6.25)$$

Воспользуемся теперь эквивалентным вложением III симплекса Car_n в Car_m , $m \geq n$, при котором некоторое его строго положительное арифметическое распределение вероятностей (5.6) переходит в центр P_m симплекса Car_m . Как уже отмечалось в § 5, оно описывается формулами, аналогичными (5.10) с неравными по численности k_i группами $K(i)$, например,

$$e(1) \xrightarrow{\Phi} [e'(1) + \dots + e'(k_1)] k_1^{-1}, \quad K(1) = \{1, \dots, k_1\}.$$

Для соответствия dIII базисных касательных векторов сохраняется простота формулы (6.24):

$$(X_1)^{dIII} = X'_1 + \dots + X'_k, \quad k = k_1.$$