

мейством  $\mathcal{P}$  распределений  $P_t$ , гладко зависящих от счетномерного параметра  $t = (t^1, t^2, \dots)$ .

Разумеется, бесконечномерность многообразия  $\mathcal{P}$  приводит к некоторым специфически бесконечномерным эффектам: например, минимаксный риск в таких задачах убывает (как правило, см. [136], [40]) медленнее, чем  $N^{-1}$ . Как показывают неравенства § 10 для среднего по кубу риску, для равномерно «толстого» по всем направлениям многообразия  $\mathcal{P}$  состоятельная оценка  $P_t$  была бы вообще невозможной. Такие оценки возможны именно потому, что эти счетномерные многообразия можно хорошо приближать конечномерными. Поэтому, верхние и нижние границы для рисков асимптотически оптимальных решающих правил приходится устанавливать в терминах колмогоровских характеристик бесконечномерных компактов, таких как  $n$ -мерные поперечники,  $\varepsilon$ -сети и т. п. В нашем случае классический колмогоровский подход еще требует некоторых коррективов, так как на многообразиях распределений вероятностей нет единой естественной инвариантной метрики, а только ее несимметричный суррогат (информационное уклонение Кульбака), а также поле местных евклидовых метрик по Фишеру с не слишком естественным (не ковариантным относительно фактора тензорного умножения) правилом риманова переноса. Поэтому сначала мы, пренебрегая инвариантностью, рассмотрим упрощенный вариант теории, связанный с проекционными оценками по Ченцову—Ван Райзину—Шварцу, см. [25], [194], [190], [196].

Начало современного этапа в теории оценок плотности распределения принято связывать с 1962 г., когда появились работы [173] и [25], авторы которых рассмотрели и исследовали соответственно *ядерные* и проекционные оценки плотности, более точные чем классические гистограммы. Аккуратности ради можно отметить, что идеи этих подходов были указаны еще раньше соответственно М. Розенблатом (1956) и Ченцовым (1958).

Рассмотрим статистическую модель  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , где априорное семейство  $\mathcal{P} = \{P_i\}$  описывается некоторым семейством плотностей  $p(\omega) = (dP/d\mu)(\omega)$  по некоторой доминирующей  $\mathcal{P}$  мере  $\mu$  на  $(\Omega, \mathcal{A})$  с идеалом  $\mathcal{L}$   $\mu$ -нуль множеств. Предположим, что на  $\Omega$  задан измеримый вес  $r(\omega)$ , и посредством скалярного произведения

$$(\varphi, f) = \int_{\Omega} \varphi(\omega) f(\omega) r(\omega) \mu(d\omega) \quad (12.1)$$

определено гильбертово пространство  $\mathcal{L}^2(r)$ . Предположим, что искомая плотность  $p(\cdot) \in \mathcal{L}^2(r)$ , и рассмотрим способы оценивания  $\pi^*(\cdot)$  этой плотности по независимой выборке  $(\omega^1, \dots, \omega^N)$  при измерении величины погрешности в метрике  $\mathcal{L}^2(r)$ , напри-