

экспоненциальное семейство $\{P_s\}$, которое можно задать формулой

$$V\omega, \quad p(\omega; s) = [p_0(\omega)]^{\alpha_0} \cdot [p_1(\omega)]^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot [p_m(\omega)]^{\alpha_m} \exp[-H(s)], \quad (7.6)$$

$$s = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1, \quad (7.7)$$

$$\forall j, \quad q_j(\omega) = \ln p_j(\omega) - \ln p_0(\omega), \quad (7.8)$$

причем если $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$, то $H(s) \leq 1$.

Доказательство неравенства (7.4) и его многомерного обобщения легко следует из неравенства Гёльдера.

Если статистики $q_0(\omega) \equiv 1(\omega), q_1(\omega), \dots, q_m(\omega)$ в канонической записи линейно независимы как случайные величины с распределением $P_0(d\omega)$ исходов, то формальная размерность m записи равна истинной размерности семейства. В противном случае каждому распределению вероятностей отвечает целое линейное подпространство значений параметров (s^1, \dots, s^m) .

Лемма 7.2. Функция $H(s)$ в (7.2) является аналитической функцией m переменных на всем пространстве \mathbb{C}^m , выпуклой в \mathbb{R}^m , причем строго, если направляющие статистики независимы, даже если пренебречь их значениями на множестве P_0 -меры нуль.

Выпуклость вытекает из тождества

$$\partial^2 H(s) / \partial s^j \partial s^k = -E_s [\partial^2 \ln p(\omega; s) / \partial s^j \partial s^k] \quad (7.9)$$

и справедливого для любых гладких мультиномиальных семейств тождества (5.2):

$$E_s [\partial \ln p(\omega; s) / \partial s^j] [\partial \ln p(\omega; s) / \partial s^k] = -E_s [\partial^2 \ln p(\omega; s) / \partial s^j \partial s^k].$$

Для геодезической линии (ср. (7.3)) канонический параметр s определяется с точностью до выбора масштаба и начала отсчета. Для вполне геодезического семейства (7.1) мы можем принять любое $P \in \mathcal{P}$ за начальное и любой базис вида $q_0(\omega) = 1(\omega), q_1'(\omega), \dots, q_m'(\omega)$ в линейном пространстве $\text{Span}\{1, q_1, \dots, q_m\}$ статистик $q_j(\omega)$, рассматриваемых с точностью до значений на множестве меры нуль. Значения логарифма нормирующего делителя будут при этом отличаться от исходного на линейную по s функцию. Если исходное представление было точным, то $\mu = m$. После выбора P_0 и единичных касательных (см. (6.38)) векторов в точке P_0 :

$$\forall j, \quad \partial \ln p(\omega; s) / \partial s^j |_{s=0} = q_j(\omega; 0) = q_j(\omega) - E_0 q_j(\omega), \quad (7.10)$$

совпадающий каждый с точностью до сдвига на константу со своей направляющей статистикой, мы можем еще вычесть из этих статистик по константе. Часто удобен стандартный выбор — принимать $q_j(\omega) = q_j(\omega; 0), \forall j$, см. (0.14).

Двойственная натуральная статистическая парамет-