

ки» R на «плоскость» \mathcal{P}

$$P_\sigma = \arg \min_{\mathcal{P}} I(P:R). \quad (8.20)$$

Эту проекцию мы будем называть *орто-проекцией*, когда

$$\forall P_s \in \mathcal{P}, \quad \int_{\Omega} [\ln P_s(d\omega) - \ln P_\sigma(d\omega)] [R(d\omega) - P_\sigma(d\omega)] = 0. \quad (8.21)$$

Согласно теореме 8.6, если для P_σ выполнено условие ортогональности (8.21) и $I(P_\sigma:R) < \infty$, то P_σ — ортопроекция R в смысле определения 8.2.

Теорема 8.7. Пусть \mathcal{P} — регулярное каноническое экспоненциальное семейство и пусть распределение R взаимно абсолютно непрерывно с \mathcal{P} , причем $I(P_k:R) < \infty$ для $1 + \dim \mathcal{P}$ распределений $P_k \in \mathcal{P}$ общего положения. Тогда существует (и единственна) ортопроекция $R_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$ распределения R на \mathcal{P} , дающая строгий минимум $I(P:R)$ на \mathcal{P} . В натуральной статистической параметризации \mathbf{t} семейства \mathcal{P} , двойственной к канонической \mathbf{s} с направляющей вектор-статистикой $\mathbf{q}(\omega)$, $R_{\mathcal{P}} = P_{\mathbf{s}(\mathbf{t})}$,

$$\mathbf{t} = \mathbf{E}_R \mathbf{q}(\omega). \quad (8.22)$$

Для экспоненциальных семейств \mathcal{P} распределений на конечных алгебрах эмпирическая мера P^* , построенная по N независимым наблюдениям с распределением $P_s \in \mathcal{P}$, с большой вероятностью взаимно абсолютно непрерывна с P_s . В этом случае оценка максимального правдоподобия для неизвестного P_s совпадает с орто-проекцией P^* на \mathcal{P} . Это следует из (8.22) и теоремы 7.8. Впрочем, это лишь частный случай общего утверждения для семейств на конечных алгебрах: когда $P^* \ll \mathcal{P}$, оценка максимального правдоподобия совпадает с проекцией P^* на \mathcal{P} . Для случая бесконечных алгебр на метод максимального правдоподобия можно смотреть как на использование перенормированного метода I -проектирования (после вычитания бесконечно большой константы), что много раз отмечалось и переоткрывалось (см. [154]). Решения уравнения наибольшего правдоподобия в такой интерпретации могут рассматриваться как I -орто-проекции на малые области семейства, определяющие локальные минимумы I -уклонения.

Некоторый интерес может представить также задача I -проектирования на квазикompактные подсемейства канонических экспоненциальных семейств. Справедлив следующий аналог теоремы 7.10.

Теорема 8.8. Пусть $\mathcal{P} = \{R_s\}$ — каноническое экспоненциальное семейство с каноническим параметром $s \in G = \text{Dom } \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^m$ и пусть компактное выпуклое множество $K \subseteq \mathbb{R}^m$ таково, что $K \cap G \neq \emptyset$. Если на подсемействе $\mathcal{K} = \{P_s, s \in K \cap G\}$ конечен $\inf_{\mathcal{K}} I(P_s:R)$, то он достигается и, притом, в единственной точке P_σ , причем

$$\forall P_s \in \mathcal{K}, \quad I(P_s:R) \geq I(P_s:P_\sigma) + I(P_\sigma:R). \quad (8.23)$$