

$$\begin{aligned} & \times \left[\int_0^1 \mathbf{E}_y q_j(\omega; a(\xi)) d\xi \right] \alpha(du) + (H[\alpha])^2 \leq \\ & \leq \|T - Y\|^2 + 9\eta r^2 n^2 + 6\eta n^2 r^3 + 4n^2 r^4 \leq \\ & \leq 10\eta n^2 r^2 + 6\eta n^2 r^3 + 4n^2 r^4 \end{aligned} \quad (10.47)$$

при $\eta < n^{-1}$.

В итоге для первого скалярного произведения получается оценка $O(\sqrt{\eta}r^2) + O(r^3)$. Проводя выкладки для второго скалярного произведения, мы приходим сразу к оценке (10.47), что дает $O(\eta r^2) + O(r^4)$. Наконец, сопоставляя все неравенства, убеждаемся в справедливости (10.43).

Теорема 10.13. Пусть $\mathcal{P} = \{P_t(\cdot), t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\} \subset \text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ есть произвольное $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство, $L(P^*, P_t) = 2I(P_t : P^*)$ — универсальная функция потерь при оценке $P^* = R \in \text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ закона P_t . Пусть $\Pi(N) = \Pi_N(\omega^1, \dots, \omega^N; d[R(\cdot)])$ — решающее правило для оценивания P_t по N независимым наблюдениям $(\omega^1, \dots, \omega^N) = \varepsilon$ с распределением $P_t^N(d\varepsilon)$, и

$$\mathfrak{R}_{\Pi(N)}(P_t) = \mathbf{E}_t^N \int_{\text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})} 2I(P_t : R) \Pi_N(\omega^1, \dots, \omega^N; d[R(\cdot)])$$

— соответствующий риск. Тогда

$$N \cdot \inf_{\Pi(N)} \sup_{\mathcal{P}} \mathfrak{R}_{\Pi(N)}(P_t) \geq n = \dim \mathcal{P}. \quad (10.48)$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\theta \in \Theta$ и рассмотрим последовательность шаров $S_{\sqrt{n}r}(\theta)$ при $r \rightarrow 0$, $r < h(\theta)$, определенного в (10.30). С каждым r можно связать минимальное $\eta = \eta(r)$, при котором неравенства (10.31) и (10.32) еще выполняются в шаре $S_{2n\sqrt{n}r}(\theta)$. Очевидно, $\eta(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и в кубе $C_r(\theta, \theta)$ выполнены утверждения лемм 10.10 и 10.11 с $\eta = \eta(r)$. Вся совокупность $\text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})$ линейно выпукла (в натуральной ${}^1\nabla$ -связности), функция потерь $2I(P_t : R)$ есть $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ -измеримая неотрицательная полунепрерывная снизу линейно выпуклая функция второго аргумента R . Поэтому, по принципу Блекуэлла—Колмогорова осреднение по исходам рандомизации

$$Q(\cdot | \omega^1, \dots, \omega^N) = \int_{\text{Cap}(\Omega, \mathcal{A})} R(\cdot) \Pi(\omega^1, \dots, \omega^N; d[R(\cdot)]) \quad (10.49)$$

дает детерминированную оценку Q , риск которой не превосходит риска исходной,

$$\forall P_t \in \mathcal{P}, \quad \mathfrak{R}_{\Pi(R)}(P_t) \geq \mathfrak{R}_{\Pi(Q)}(P_t). \quad (10.50)$$

Ограничимся теперь подсемейством $\mathcal{G}_h(\theta) = \{P_t, t \in C_h(\theta, \theta)\}$. Если мы спроектируем оценку Q на логарифмически выпуклую оболочку $\mathfrak{G}(\mathcal{G}_h(\theta))$, $\pi(Q) = U$, мы при каждом исходе $\varepsilon =$