

только тогда, когда существует марковский морфизм $\mathcal{W}^{(12)}$, соответственно морфизмы $\mathcal{W}^{(12)}$ и $\mathcal{W}^{(21)}$ такие, что

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta^{(2)} = P_\theta^{(1)} \mathcal{W}^{(12)}, \quad (2.10)$$

соответственно

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta^{(2)} = P_\theta^{(1)} \mathcal{W}^{(12)}, \quad P_\theta^{(1)} = P_\theta^{(2)} \mathcal{W}^{(21)}. \quad (2.11)$$

Доказательство. Достаточность условия (2.10) вытекает из цепочки равенств

$$\forall \theta \in \Theta, \quad Q_\theta = P_\theta^{(2)} P^{(2)} = (P_\theta^{(1)} \mathcal{W}^{(12)}) P^{(2)} = P_\theta^{(1)} (\mathcal{W}^{(12)} \circ P^{(2)}).$$

Необходимость (2.10) следует из (2.9), если принять $(\Delta, \mathcal{D}) = (\Omega^{(2)}, \mathcal{A}^{(2)})$ и $P^{(2)} = P_{00}^{(2)}$, см. (2.7).

Насколько статистическая эквивалентность семейств шире, чем упоминавшаяся выше эквивалентность относительно взаимно однозначных и взаимно измеримых отображений пространств исходов (т. е., в сущности, эквивалентность относительно класса детерминированных решающих правил), показывает следующая теорема, которую мы сформулируем для случая *дискретных пространств*, т. е. таких, в которых алгебра \mathcal{A} событий порождается не более чем счетным числом атомов.

Теорема 2.2. Если два семейства $\{P_\theta^{(1)}\}$ и $\{P_\theta^{(2)}\}$ распределений вероятностей на дискретных пространствах статистически эквивалентны, то существует третье дискретное измеримое пространство (Ω, \mathcal{A}) и измеримые сюръективные отображения $f_i: (\Omega^{(i)} - \Omega_0^{(i)}) \rightarrow \Omega$, $i = 1, 2$, где

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta^{(i)}(\Omega_0^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.12)$$

такие, что

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta^{(1)} f_1^{-1}(\cdot) = R_\theta(\cdot) = P_\theta^{(2)} f_2^{-1}(\cdot), \quad (2.13)$$

и все три семейства $\{P_\theta^{(1)}\}$, $\{R_\theta\}$, $\{P_\theta^{(2)}\}$ статистически эквивалентны. Изоморфные между собой алгебры $f_1^{-1} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{-1}$ и $f_2^{-1} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(2)}$ являются *достаточными алгебрами* этих эквивалентных семейств.

Доказательство теоремы 2.2 и ее обобщений основывается на следующем замечании:

Лемма 2.3. Если два семейства $\{P_\theta^{(i)}, \theta \in \Theta\}$, $i = 1, 2$, статистически эквивалентны с морфизмами $\mathcal{W}^{(12)}$ и $\mathcal{W}^{(21)}$ в (2.11), то каждое $P_\theta^{(i)}$ является стационарным распределением вероятностей для марковской цепи на $(\Omega^{(i)}, \mathcal{A}^{(i)})$ с переходной вероятностью $P^{(i)} = \mathcal{W}^{(ij)} \circ \mathcal{W}^{(ji)}$, $j \neq i$. При этом соответствие (2.11) продолжается на обе совокупности всех $P^{(i)}$ -стационарных распределений.