

Эта теорема является простейшим вариантом интегрального неравенства информации, правда для областей специального вида — параллелепипедов,  $C_r(z, \theta)$ , в местной метрике  $\Delta^j \Delta^k \omega_{jk}(\theta)$  являющихся кубами и допускающих потому хорошую оценку остаточных членов. Выведем из нее одно принципиальное следствие

**Теорема 10.7.** Пусть  $\mathcal{P} = \{P_t(\cdot), t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\}$  есть  $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство,  $2I(P_t : P_t) = L(\tau; t)$  — универсальная функция потерь при оценке  $P_\tau$  закона  $P_t$ . Тогда в схеме независимых испытаний  $(\Omega^N, \mathcal{A}^{\otimes N}, \mathcal{P}^N)$  для минимакса риска по множеству всех правил  $\Pi(N)$  оценки  $P_t$

$$N \cdot \inf_{\Pi(N)} \sup_{\theta \in \Theta} \mathfrak{R}_{\Pi(N)}(\theta) \geq n(1 - \beta_{\mathcal{P}}(N)), \quad (10.24)$$

где функция  $\beta_{\mathcal{P}}(N) = o(1)$  определяется только семейством  $\mathcal{P}$ .

Для доказательства фиксируем  $\theta \in \Theta$  и построим убывающую последовательность  $\theta$ -местных кубов  $C_{r(N)}(\theta, \theta)$ , где  $r(N) = N^{-1/4}$ . Так как поправка  $\eta(r) = \eta(C_r(\theta, \theta)) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , то итоговая поправка

$$\beta(N) \leq 1 - [1 + \eta(N^{-1/4})]^{-4} [1 - N^{-1/4}] \rightarrow 0.$$

Таким образом, для любого правила  $\Pi(N)$  средний по кубу  $C_{r(N)}(\theta, \theta)$  риск не меньше  $nN^{-1}(1 - \beta(N))$ , а его верхняя грань по кубу  $C_{r(N)}(\theta, \theta)$ , тем более по всему  $\Theta$  может быть только больше. Для дважды непрерывно дифференцируемых семейств  $\beta(N) = O(N^{-1/4})$ .

Все границы поправок зависят от точки  $\theta \in \Theta$  и, как мы знаем из таблицы примера 9, могут беспредельно возрастать при подходе к естественной границе семейства. Поэтому, асимптотическую теорию удобно развивать для компактных подсемейств с равномерными показателями гладкости (чем мы уже пользовались, рассматривая шаровые и кубические подсемейства).

**Определение 10.3.** Пусть  $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\}$  есть  $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство. Его подсемейство  $\{P_t, t \in F \subset \Theta\}$ , где  $F = [\text{Int } F]$  — замкнутая подобласть в  $\Theta$ , мы будем называть *компактным  $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейством* (или иногда подсемейством).

Условимся еще об обозначении средних. Пусть  $C$  — квадратуемая по Риману замкнутая подобласть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  параметров семейства  $\mathcal{P}$ ,  $C \subset \Theta$ . Тогда

$$\mathfrak{M}_C[\psi] = \int_C \psi(t) \text{Vol}\{dt\} \quad (10.25)$$

есть среднее по объему Джеффрейса значение функции  $\psi(t)$  на  $C$ .

**Теорема 10.8.** Пусть  $\mathcal{F} = \{P_t, t \in F \subset \Theta\}$  есть компактное  $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. подсемейство с квадратуемой по Риману компактной