

где величина  $\varkappa(\theta)$  определена в (10.2). Тогда

$$\forall \zeta \neq 0, \quad \|\zeta^j P_j^{0'}(\theta)\|_{\theta} \geq (1-\varepsilon) \|\zeta^j P_j'(\theta)\|_{\theta}. \quad (10.55)$$

Не ограничивая общности, можно взять такую  $\theta$ -местную систему координат, в которой тензор  $w_{jk}^0(\theta)$  приведен к главным осям,  $w_{jk}^0(\theta) = \lambda_j \delta_{jk}$ , где для всех  $\lambda_j$  выполнено неравенство  $1-\varepsilon \leq \lambda_j \leq 1$ . Если, наоборот, сделать единичным тензор  $w_{jk}^0(\theta)$ , то тензор  $w_{jk}(\theta)$  превратится в  $\lambda_j^{-1} \delta_{jk}$ . По лемме 10.1 семейство сужений  $\{P_t^0\}$  также будет  $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д., но уже с некоторой своей функцией  $\eta^0(\rho)$ , характеризующей поведение касательной плоскости вблизи  $\theta$ . Используя лемму 10.3 в новом шаре  $S_{2n\sqrt{n}\rho}^0(\theta)$ , по (10.55) находим

$$\begin{aligned} \forall x, y \in S, \quad 2I(P_x^0: P_y^0) &\geq [1 + \eta(\rho)]^{-1} \times \\ &\times [1 - \eta^0(\rho)] [1 - \varepsilon] 2I(P_x: P_y). \end{aligned} \quad (10.56)$$

Рассмотрим теперь куб  $C_r(\theta)$  в старой местной параметризации с  $r = \rho(1-\varepsilon)^{1/2}$ , целиком попадающий в «новый» куб  $C_\rho^0(\theta)$ , и построим по оценке  $R \in \text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$  следующую цепочку оценок

$$R \rightarrow Q \rightarrow Q^0 \rightarrow U^0 \rightarrow P_\tau^0 \rightarrow P_\tau$$

распределения вероятностей из семейства  $P_t$ . Все эти отображения измеримы,  $\tau \in S_{2n\sqrt{n}\rho}^0$  и по лемме 10.12,  $\forall t \in C_r(\theta)$ ,

$$2I(P_t: R) \geq 2I(P_t^0: P_\tau^0) - \sqrt{\eta^0(\rho)} B(n) \rho^2 - C(n) \rho^4. \quad (10.57)$$

Выражая здесь  $I(P_t^0: P_\tau^0)$  по (10.56), получаем

$$\begin{aligned} \forall t \in C_r(\theta), \quad (1-\varepsilon)^{-1} \cdot 2I(P_t: R) &\geq [1 + \eta(\rho)]^{-1} \times \\ &\times [1 - \eta^0(\rho)] \{2I(P_t: P_\tau) - \sqrt{\eta^0(\rho)} B(n) \rho^2 - C(n) \rho^4\}, \end{aligned}$$

и аналогичное неравенство для рисков. Так как  $P_\tau$  — оценка закона, построенная через оценку параметра, к ней применима теорема 10.6. Поэтому для средних рисков при  $\varepsilon < 1/2$ ,  $\eta(r) < < n^{-1}$ ,  $\eta^0(2r) < n^{-1}$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)^{-1} \mathfrak{M}_{\Pi(R)}(P_t) &\geq nN^{-1} - A(n) [2\eta(r) + \eta^0(2r)] N^{-1} - \\ &- 2nr^{-1}N - 4\sqrt{\eta^0(2r)} B(n) r^2 - 6C(n) r^4 \end{aligned}$$

и аналогичное неравенство для  $\sup_t \mathfrak{M}_{\Pi(R)}(P_t)$ . Отсюда переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , когда  $\eta^0(2r) r^6 = N^{-3}$ , получаем

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} N \inf_{\Pi(N)} \sup_t \mathfrak{M}_{\Pi(N)}(P_t) \geq (1-\varepsilon)n.$$

Отсюда (10.48) вытекает в силу произвольности  $\varepsilon$ .