

Теорема 9.8. Пусть $\{P_t, \theta' < t < \theta''\} = \mathcal{P}$ есть однопараметрическое семейство вероятностных мер, $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемых при всех $t \in (\theta', \theta'')$, и пусть параметр t допускает эффективную оценку $q(\omega)$, обращающую неравенство информации (9.18) в равенство. Тогда семейство \mathcal{P} является однопараметрическим каноническим экспоненциальным семейством с плотностями (0.11) (или его интервальным подсемейством) с направляющей статистикой $q(\omega)$ и некоторой канонической параметризацией s . Параметр t является натуральным статистическим параметром семейства, двойственным s . Семейство $\{P_t\}$ определено (или может быть доопределено) для всех значений канонического параметра $s \in G = \text{Dom } \mathcal{P}$, при которых конечен интеграл (0.12) для нормирующего делителя.

Совершенно аналогично могут быть перенесены на общий случай и теоремы 9.4 и 9.5 (см. [34]). Простота этого перенесения теорем 9.2—9.5 связана с тем, что введенная нами $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемость является довольно сильным ограничением. Из свойства (9.34) вытекает, в частности, что $P_\theta \gg P_t$ при всех $t \in O_\theta$. Таким образом, наше определение 9.2 интересно только для семейств взаимно абсолютно непрерывных распределений вероятностей. Ограничения этого типа можно несколько ослабить, используя, например, см. [136], [198], непрерывную L_r -дифференцируемость, но полностью освободиться от них нельзя. Если $P_\theta(A) = 0$, $P_\theta(\cdot) \gg P_\theta'(\cdot)$, а $P_t(A) > 0$ при всех $t \neq \theta$, то никаких выводов о поведении $f(\omega)$ на A по моментам $E_\theta |f(\omega)|^k$ сделать невозможно, поскольку $P_\theta(\cdot)$ и $P_\theta'(\cdot)$ «не чувствуют» этого, [142], [119].

Для мотивировки наших дальнейших построений рассмотрим тривиальный, но очень поучительный пример совокупности Car_2 , см. (3.15), всех распределений вероятностей на двухатомной алгебре при использовании различных параметризаций.

Пример 9. Семейство

$$P_\theta(\cdot) \leftrightarrow (p_1(\theta) = t(\theta), p_2(\theta) = 1 - t(\theta)) \quad (9.36)$$

всех вероятностных мер на $(\Omega_2, \mathcal{A}(\Omega_2))$, рассматриваемое как ∇ — геодезическая линия, с геодезическим параметром θ , заданным по [14], [15] квадратурой

$$d\theta = [t(1-t)]^{r-1} dt \quad (9.37)$$

через натуральную $\gamma = 1$ координату t , $0 \leq t \leq 1$, или связью

$$d\theta = 2^{-2(r-1)} [\sin(\sigma/2)]^r d\sigma \quad (9.38)$$

через длину дуги Бхаттачария, $\sigma = 2\varphi$, где $\varphi = \arcsin \sqrt{t}$ — центральный угол на сфере, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Внутри интервала $0 < t < 1$ все геодезические параметризации геометрически эквивалентны. В отношении статистики это не так — эффективную оценку допускает только натуральная статистическая параметризация t . Все остальные не имеют да-