

## § 11. Параметрическая задача статистического оценивания. Асимптотически оптимальные оценки

Неравенство информации является точным на классе  $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемых семейств  $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\}$  с касательной плоскостью  $\{\forall \xi \in \mathbb{R}^n, P(\cdot | \theta) + \xi^j P_j'(\cdot | \theta)\}$ . Другими словами, его нельзя уточнить, если известны только первые частные производные. Для конкретных семейств и конкретной оценки его можно уточнять (см. [77], [132], [139], [5], [180], а также литературу в [34], [142]). С другой стороны, существует достаточно широкий класс гладких семейств, для которых при естественной функции потерь  $L(R^*; P_t) = 2I(P_t : R^*)$  в схеме  $N$  независимых испытаний минимакс риск убывает, как  $nN^{-1}$ . Этот факт удастся доказать для семейств гладкости не меньше  $C^{(2)}$ , поскольку доказательство существенно использует тождество (5.2) для матрицы информации Фишера. Теория гладких семейств распределений вероятностей классов  $C^{(2)}$  и  $C^{(3)}$  начала интенсивно развиваться после пионерской работы Эфрона [115], см. также [116], [117], где было введено понятие статистической кривизны. За кратким обзором этого направления мы отсылаем к [153]. Здесь же мы ограничимся наброском доказательства того, что построенная в  $C^{(1)}$ -теории граница является для широкого класса семейств асимптотически правильной.

Для упрощения мы будем предполагать, что каждое рассматриваемое гладкое семейство взаимно абсолютно непрерывных распределений вероятностей задается семейством согласованных плотностей по какой-то доминирующей мере, гладко зависящих от параметра, числового или векторного, на единственной карте  $(\Theta, \varphi)$ ,  $\Theta \ni t = \varphi(P)$ , где  $\Theta$  — открытая область в  $\mathbb{R}^n$ . Это определение *простого* семейства подразумевает, что соответствие  $t \rightarrow P_t$  взаимно однозначно, так что поверхность  $\{P_t, t \in \Theta\}$  не имеет самопересечений. Через  $\mathcal{L}$  мы будем обозначать общий идеал событий  $P_t$ -меры нуль.

**Определение 11.1.** Простое семейство распределений вероятностей  $\{P_t, t \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\} \subseteq \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{L})$  мы будем называть (непрерывно) *m-гладким*, когда:

1°. Существует вариант плотностей  $p(\omega; t)$  по фиксированной мере  $\mu$  с тем же идеалом  $\mathcal{L}$   $\mu$ -нуль-множеств такой, что при каждом  $\omega \in \Omega$  плотность  $p(\omega; t)$  есть  $m$  раз (непрерывно) дифференцируемая положительная функция аргумента  $(t^1, \dots, t^n) = t \in \Theta$ .

2°. При каждом  $t \in \Theta$  первые частные производные  $p_j'(\omega; t) = (\partial/\partial t^j) p(\omega; t)$  плотности,  $j = 1, \dots, n$ , линейно независимы на  $\Omega$ , даже если пренебречь их значениями на любом  $\mathcal{L}$ -множестве.