

Справедливость (10.9) вытекает из требуемой в (10.4) непрерывности вторых моментов и линейной независимости производных (10.2).

Укажем теперь связь $\mathcal{L}^{(2)}$ -метрики с информационным количеством Кульбака.

Лемма 10.3. Пусть $\{P_t(\cdot), t \in \Theta\}$ есть $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство, $\theta \in \Theta$. Тогда в достаточно малой выпуклой окрестности O_{θ}'' , в которой сходятся интегралы (10.4), справедливо представление

$$\begin{aligned} & (x^j - y^j)(x^k - y^k) \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta \langle P'_j(\mathbf{z}(\alpha)), P'_k(\mathbf{z}(\beta)) \rangle_{\mathbf{z}(\beta)} = \\ & = (x^j - y^j)(x^k - y^k) \int_0^1 d\alpha \int_0^\alpha d\beta E_{\mathbf{z}(\alpha)} q_j(\omega; \mathbf{z}(\alpha)) q_k(\omega; \mathbf{z}(\beta)) = \\ & = I(P_x: P_y), \quad \mathbf{z}(s) = (1-s)x + sy. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Следствие. В условиях леммы для любого $\eta > 0$ в любой выпуклой подокрестности $O''_{\theta\eta} \subset O'_{\theta\eta}$, где $O'_{\theta\eta}$ определена в лемме (10.2), справедливо неравенство

$$\forall x, y \in O''_{\theta\eta} \left| \frac{2I(P_x: P_y)}{(x^j - y^j)(x^k - y^k) w_{jk}(\theta)} - 1 \right| < \eta. \quad (10.13)$$

Так как каждое $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейство $\mathcal{P} = \{P_t, t \in \Theta\}$ по определению $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемо, то для \mathcal{P} в каждой точке $t = \theta$ справедлива дилемма неравенства информации, непосредственно вытекающая из утверждения 4^о леммы 10.1:

Утверждение 10.4. Либо часть собственных чисел матрицы вторых E_{θ} -моментов вектор-статистики $f(\omega)$ обращается в $+\infty$, либо ее среднее $m(t) = E_t f(\omega)$ в некоторой окрестности точки $t = \theta$ существует, дифференцируемо при $t = \theta$, и для производной справедливо или неравенство (9.11) в случае однопараметрического семейства \mathcal{P} , или его многомерный аналог.

Это свойство есть свойство самого семейства, безотносительно к выбору гладкой параметризации, см. [34] и указанную там библиографию, ср. также [178].

Для однопараметрического $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. семейства $\mathcal{P} = \{P_t\}$ дилемма особенно проста: для любой статистики $f(\omega) \forall t$ либо

$$E_t [f(\omega) - t]^2 \geq \text{Var}_t f(\omega) \geq [m'(t)]^2 (dt/d\sigma)^2, \quad (10.14)$$

либо ее средний квадрат уклонения

$$E_t [f(\omega) - t]^2 = +\infty. \quad (10.15)$$

Здесь использовано третье представление информационного количества Фишера

$$I(\theta) = [(d\sigma/dt)(\theta)]^2 = \|P'(\theta)\|_{\theta}^2, \quad (10.16)$$