

Если заранее предполагать монотонность формы всюду в  $\text{Int } \text{Car}_n$ , то из нее можно вывести ее непрерывность, опираясь на следующее геометрическое предложение.

**Лемма 5.4.** Каковы бы ни были пара  $P, Q \in \text{Int } \text{Car}_n$  и  $\varepsilon > 0$ , можно найти в  $\text{Car}_n$  две пары строго положительных арифметических распределений  $(P', Q')$  и  $(P'', Q'')$  и два марковских отображения  $\Pi$  и  $\text{Ш}$  симплекса  $\text{Car}_n$  в себя, такие что  $(P' \Pi, Q' \Pi) = (P, Q)$ ,  $(P \text{Ш}, Q \text{Ш}) = (P'', Q'')$ , и для хикватрат длин

$$\sum_i (p'_i - q'_i)^2 (p'_i)^{-1} - \sum_i (p''_i - q''_i)^2 (p''_i)^{-1} < \varepsilon. \quad (5.13)$$

Наконец, проверка (5.4) элементарна ввиду  $\delta \sqrt{P \otimes Q} = \sqrt{P} \otimes \delta \sqrt{Q} + \delta \sqrt{P} \otimes \sqrt{Q}$ . Этим доказательство универсальности фишеровской информации завершено, и, как подчеркнул Касс [153], в принятом формализме статистического решения универсальных аналогов у нее быть не может.

Для гладких семейств взаимно абсолютно непрерывных распределений вероятностей  $\{P_\theta, \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m\}$  в последней из записей (5.5) можно перейти к плотностям  $p(\omega; \theta)$  по фиксированной доминирующей мере  $\mu(\cdot)$ ;  $P_\theta(d\omega) = p(\omega; \theta) \mu(d\omega)$ ,

$$\int_{\Omega} [\delta \ln p(\omega; \theta)]^2 P_\theta(d\omega) = (\delta \theta)^2 \int_{\Omega} \left[ \frac{d \ln p(\omega; \theta)}{d\theta} \right]^2 p(\omega; \theta) \mu(d\omega), \quad (5.14)$$

совпадающее с (5.1). Здесь, как и всюду ранее в этом параграфе для дифференциала распределения вероятностей  $P$  или его параметра  $\theta$  употребляется символ  $\delta$ , чтобы не путать его с символом  $d$  элемента интегрирования по  $\Omega$ .

## § 6. Инвариантные линейные связности в многообразиях распределений вероятностей

Как отмечалось во введении, впервые указанная нами в [26] связность многообразий распределений вероятностей с параллельным переносом (0.10) касательных векторов является единственной инвариантной связностью, в которой геодезические линии и вполне геодезические поверхности описывают «интересные» семейства распределений вероятностей, а именно канонические экспоненциальные семейства, см. соответствующие характеристизационные теоремы в [14], [15] и [33], [34]. Разумеется, можно было заранее предвидеть, что указанная экспоненциальная (хотя правильнее её было бы называть *логарифмической*) связность не является единственной среди инвариантных. Инвариантной будет, конечно, простейшая плоская «смесевая» (*mixture*) связность, в которой геодезические линии описывают-