

ризация (*expectation parametrization*) задается по (0.10)

$$\forall j, \quad t_j(s) = \sum_i q_j(\omega_i) p(\omega_i; s) = E_s q_j(\omega), \quad (7.11)$$

или, при стандартном выборе направляющих статистик

$$\forall j. \quad t_j(s) = E_s q_j(\omega; 0), \quad t_j(0) = 0. \quad (7.12)$$

Для параметризации (7.3) геодезической, соединяющей  $P_0$  и  $P_1$ ,

$$t(0) = -I(P_1:P_0), \quad t(1) = I(P_0:P_1). \quad (7.13)$$

Параметризация  $t=t(s)$  инъективна, если инъективна исходная каноническая параметризация. Это следует из равенств

$$\begin{aligned} t_j(s) &= \partial H(s) / \partial s^j, \quad t = \text{grad } H(s), \\ (\partial t_j / \partial s^k)(s) &= \partial^2 H(s) / \partial s^j \partial s^k = \text{Cov}_s[q_j(\omega), q_k(\omega)]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Ниже эта связь между двойственными статистиками будет описана более подробно. Для однопараметрического семейства

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \min_i q(\omega_i) < t(s) < \max_i q(\omega_i). \quad (7.15)$$

При  $s \rightarrow \pm\infty$  существуют два вырожденных предельных распределения  $P_{-\infty}$  и  $P_{+\infty}$ , сосредоточенных на подмножествах  $\Omega^- = \{\omega : q(\omega) = \min_i q(\omega_i)\}$ ,  $\Omega^+ = \{\omega : q(\omega) = \max_i q(\omega_i)\}$ . Аналогичную *инфинитную границу* можно присоединить и к любым  $m$ -параметрическим каноническим экспоненциальным семействам на конечных алгебрах. В частности, всю совокупность  $\text{Int Car}_n$  строго положительных распределений на  $\mathcal{A}_n$  также, при соответствующей канонической параметризации, является каноническим экспоненциальным семейством. Если положить  $\chi_k(\omega_i) = \delta_{ki}$  и выбрать  $q_j(\omega) = \chi_j(\omega)$ ,  $j=1, \dots, n-1$ , за направляющие статистики, то двойственными натуральными статистическими координатами будут  $p_1, \dots, p_{n-1}$ . Строение инфинитного края семейства здесь очевидно. Впрочем, на многообразии  $\text{Int Car}_n$  вектор-функций  $\mathbf{p}(s) = (p(\omega_1; s), \dots, p(\omega_n; s))$  на  $\mathbb{R}^{n-1}$  можно ввести и более хитрую топологию, связанную с их поведением на бесконечности, чтобы возник нарост Воробьева—Фаддеева [2], на котором непрерывны всевозможные условные распределения вероятностей.

Первым на этом месте изложение теории и укажем, какие изменения надо внести в изложенное, чтобы охватить случай бесконечных алгебр  $\mathcal{A}$ . По определению, каноническое экспоненциальное семейство  $\mathcal{P} = \{P_s\}$  задается семейством плотностей (0.11) по некоторой доминирующей мере при всех значениях канонического параметра  $s$ , при которых нормирующий делитель конечен, см. (0.12). Так как все  $P_s$  получаются взаимно абсолютно непрерывными, то плотности удобно брать по одной из мер  $P_s$ . Лемма 7.1 переносится без изменений ввиду неравенства (7.4) и его многомерного аналога. При этом в интервале  $\{s : 0 < s < 1\}$  функция  $H(s)$  и плотности  $p(\omega; s)$  являются ана-