

Доказательство. Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ — разложение Хана для заряда $P - Q$. Рассмотрим сужения $P \rightarrow P_{\text{red}}$ и $Q \rightarrow Q_{\text{red}}$ на двухатомную алгебру с атомами Ω^+ и Ω^- . Тогда

$$\rho(P, Q) \geq \rho(P_{\text{red}}, Q_{\text{red}}); \quad d_V(PQ) = d_V(P_{\text{red}}, Q_{\text{red}}).$$

Поэтому достаточно доказывать (3.14) и (3.16) для распределений вероятностей (3.15), где $d_V(R_x, R_y) = 2|x - y|$, см. аффинную геометрическую конструкцию в [13], [15], [168].

Совершенно аналогично проводится сравнение с d_V любых тарированных невырожденных монотонно инвариантных информационных количеств, т. е. монотонных инвариантов, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\forall(P, Q), L(P, P) = 0; P \neq Q \Rightarrow L(P, Q) > 0. \quad (3.17)$$

Рассмотрим сперва значения $l(x, y) = L(R_x, R_y)$, на совокупности (3.15). Легко видеть, что функция $l(x, y)$ на квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ тождественно равна нулю на его диагонали $x = y$ и строго положительна вне нее. Поэтому функция

$$g(z) = \inf_{|x-y| \geq z} l(x, y) \quad (3.18)$$

монотонна и строго положительна при $z > 0$, и $l(0) = 0$.

Теорема 3.6. Если заданная на всех квадратах объектов Сар функция $L(P, Q)$ есть монотонный инвариант, удовлетворяющий условиям (3.17), то

$$L(P, Q) \geq g(d_V(P, Q)). \quad (3.19)$$

Если учесть, что для любого монотонного инварианта L будет $L(P, P) = \text{const}$ (см. замечание 2 к определению 3.1), то из (3.19) вытекает, что любой невырожденный в окрестности диагонали монотонный инвариант задает на совокупностях Сар топологию, не менее тонкую, чем расстояние по вариации. Этот фундаментальный факт является широким обобщением результата Чисара для ϕ -дивергенций (3.13).

Совершенно аналогично может быть развита теория инвариантов, монотонных инвариантов и достаточных статистик для семейств, состоящих из конечного или счетного числа распределений вероятностей $\{P_1, P_2, \dots\}$ (ср. [148]). Расширим для удобства каждое такое семейство, добавив его ковариант $P_0 = \sum 2^{-k} P_k$ (или $P_0 = n^{-1} \times (P_1 + \dots + P_n)$, когда семейство конечно). Мера P_0 доминирует остальные, поэтому производные $f_k(\omega) = (dP_k/dP_0)(\omega)$ Радона—Никодима P_0 -почти наверное конечны, $\sum 2^{-k} f_k(\omega) = 1$. Их набор определяет минимальную достаточную статистику семейства. Если положить

$$\mu^{(+)}(z | a_1, a_2, \dots) = (zP_0 - \sum a_k P_k)^+, \quad (3.20)$$

то эти величины при $0 \leq z < \infty$; $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $a_1 + \dots + a_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$, образуют полную систему инвариантов, притом монотонных.