

Теорема 11.12. Пусть  $\mathcal{F} = \{P_t, t \in F \subset \Theta \subseteq \mathbb{R}^n\}$  есть 3-гладкое компактное подсемейство,  $P_\theta \in \mathcal{F}$ . При  $N \geq N_1(\mathcal{F})$ , т. е.  $N^{-3/8} \leq \rho_1(\mathcal{F})$ , и при каждом  $\varepsilon \in V(N) = U_1(N) \cap U_2(N) \cap U_3(N)$  система уравнений максимального правдоподобия (11.23) имеет корень  $\tau = \tau(\varepsilon)$

$$\|\tau(\varepsilon) - \theta\|_0 \leq N^{-3/8}, \quad (11.42)$$

являющийся локальным максимумом в шаре  $S^{(1)}(\theta)$ ; других корней в этом шаре система не имеет. При любом целом  $m = 1, \dots, 12$   $V(N)$ -условное математическое ожидание

$$P_\theta^N(V(N)) E_\theta^{(N)} [\|\tau(\varepsilon) - \theta\|^m | V(N)] \leq \leq 2^m E_\theta^{(N)} \|\text{grad}_\theta g^{(N)}(\varepsilon; t)\|^m, \quad (11.43)$$

$$P_\theta^N(V(N)) E_\theta^{(N)} [2I(P_\theta; P_{\tau(\varepsilon)}) | V(N)] \leq nN^{-1} + + B_3(\mathcal{F}) N^{-3/2}. \quad (11.44)$$

Доказательство. Пусть  $N \geq N_1$ , и пусть  $t$  лежит на поверхности  $\theta$ -шара  $S_N(\theta)$  радиуса  $r(N) = N^{-3/8}$ , т. е.  $\|t - \theta\|_0 = N^{-3/8}$ . Оценим производную  $g'_v(\varepsilon; t)$  строго вогнутой функции  $g^{(N)}(\varepsilon; t)$  по нормали к поверхности шара, т. е. по направлению  $v$ ,  $\|t - \theta\|_v = t - \theta$ :

$$g'_v(\varepsilon; t) = v^j g_j(\varepsilon; \theta) - \|t - \theta\| + \|t - \theta\| v^j v^k [g_{jk}(\varepsilon; \theta) + \delta_{jk}] + + \frac{1}{2} \|t - \theta\|^2 g'''_{vvv}(\varepsilon; x(s)) \leq \leq N^{-3/8} \left\{ + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{4} N^{-3/8},$$

где были использованы неравенства (11.28) и (11.29). Таким образом, на поверхности шара градиент  $C^{(2)}$ -функции направлен строго внутрь шара, и векторное поле градиента имеет нуль внутри шара, единственный по строгой вогнутости  $g^{(N)}(\varepsilon; t)$ , что доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь  $\tau = \tau(\varepsilon)$  — указанный корень,  $\|\tau - \theta\|_0 \leq N^{-3/8}$ . Как следствие системы уравнений максимального правдоподобия, в этой точке обращается в нуль производная по направлению  $v$  от  $\theta$ ,  $\|\tau - \theta\|_v = \tau - \theta$ :

$$g'_v(\varepsilon; \tau) = 0 = v^j g_j(\varepsilon; \theta) + \|\tau - \theta\| v^j v^k [g_{jk}(\varepsilon; \theta) + \delta_{jk}] - - \|\tau - \theta\| + \frac{1}{2} \|\tau - \theta\|^2 g'''_{vvv}(\varepsilon; x(s)).$$

Выразим отсюда  $\|\tau - \theta\|$ :

$$\|\tau - \theta\| = v^j g_j + \|\tau - \theta\| v^j v^k [g_{jk} + \delta_{jk}] + \frac{1}{2} \|\tau - \theta\|^2 g'''_{vvv}(\varepsilon; x). \quad (11.45)$$