

Нижнюю грань

$$d_n(F) = \inf_{\dim M = n} \delta(F, M) = \inf_{\dim M = n} \sup_{u \in F} \inf_{v \in M} \|u - v\| \quad (12.23)$$

отклонений F от всевозможных линейных n -мерных плоскостей M называют n -мерным поперечником (Колмогорова) множества F (в пространстве \mathcal{L}). Это понятие, введенное А. Н. Колмогоровым в 1936 г., играет фундаментальную роль в теории аппроксимации. Другой геометрической характеристикой, на важную роль которой указал С. М. Никольский (см. [21]), является n -мерный внутренний радиус $r_n(F)$, т. е. радиус максимального n -мерного \mathcal{L} -диска (\mathcal{L} -шара в n -мерном подпространстве), который целиком уместается внутри тела F :

$$r_n(F) = \sup_{\dim M = n} \sup_{u \in (M \cap F)} \inf_{v \in (M - F)} \|u - v\|. \quad (12.24)$$

Мы будем считать, что скорости убывания $\mathcal{L}^2(r)$ -поперечника Колмогорова и $\mathcal{L}^2(r)$ -радиуса Никольского для априорного семейства \mathcal{P} известны.

Рассмотрим следующее ограничение на семейство \mathcal{P} и вес $r(\omega)$:

$$C^{-1} \leq \text{Vrai} \inf_{P \in \mathcal{P} \text{ } \omega \in \Omega} p_P(\omega) r(\omega) \leq \text{Vrai} \sup_{P \in \mathcal{P} \text{ } \omega \in \Omega} p_P(\omega) r(\omega) \leq C, \quad (12.25)$$

из которого вытекает, что все меры $P \in \mathcal{P}$ равномерно абсолютно непрерывны друг относительно друга

$$C^{-2} \leq \text{Vrai} \inf (dP_1/dP_2)(\omega) \leq \text{Vrai} \sup (dP_1/dP_2)(\omega) \leq C^2. \quad (12.26)$$

Это последнее условие очень популярно в теории оценивания плотностей, см. [34], [140], [142]. Из него, в частности, следует, что при каждом $P \in \mathcal{P}$ расстояние между плотностями $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ в метрике $\mathcal{L}_2(r)$ совпадает по порядку величины с расстоянием между самими распределениями P_1 и P_2 , измеренном в метрике $\mathcal{L}^{(2)}(P)$, введенной скалярным произведением (9.33).

Лемма 12.3. Пусть все плотности n -мерного дискового семейства $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\rho(n)$ имеют вид

$$p(\cdot | a_1, \dots, a_n) = p_0(\cdot) + a_1 \varphi_1(\cdot) + \dots + a_n \varphi_n(\cdot);$$

$$\sum (a_k)^2 \leq \rho^2, \quad (12.27)$$

и все удовлетворяют условию (12.25). Здесь $\{\varphi_k(\cdot)\}_{k=0}^n$, где $\varphi_0(\cdot) = p_0(\cdot)$ — ортонормированная система в $\mathcal{L}^{(2)}(r)$. Пусть для отыскания параметра a неизвестного наблюдаемого $P_a \in \mathcal{P}$ по независимой выборке $(\omega^1, \dots, \omega^N)$ построена детерминированная оценка $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ такая, что обязательно $|\alpha^*| \leq \rho$. Тогда для возникающей оценки $p(\cdot | \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ неизвестной плотности $p(\cdot | a_1, \dots, a_n)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P^{(N)} \|\pi^*(\cdot) - p(\cdot)\|^2 &\geq |\mathbf{E}_P^{(N)} \alpha^* - a|^2 + \\ &+ C^{-1} N^{-1} n^{-1} [\text{div } \mathbf{E}_P^{(N)} \alpha^*]^2. \end{aligned} \quad (12.28)$$