

можно указать такую постоянную $\sigma = \sigma(a, \mathcal{F})$, что

$$P_0^N \{g^{(N)}(\varepsilon; \mathbf{t}; \theta) > -a^2/6\} < \sigma N^{-2}, \quad (11.26)$$

каковы бы ни были $(\mathbf{t}, \theta) \in A(a) \subset K(F) \times F$, см. (11.21).

Доказательство этого утверждения о поведении односторонних уклонений от положительного (конечного или бесконечного) среднего носит технический характер. Оно основано на неравенствах для среднего арифметического срезов

$$\pi_k(\omega; \mathbf{t}, \theta) = \min \{k, \ln p(\omega; \theta) - \ln p(\omega; \mathbf{t})\},$$

имеющих все моменты, и использовании леммы 11.6. За деталями доказательства мы отсылаем к [34, лемма 27.17].

Для изучения локального поведения θ -приведенной логарифмической функции правдоподобия в окрестности $\mathbf{t} = \theta$ рассмотрим коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} g^{(N)}(\varepsilon; \mathbf{t}; \theta) &= g^{(N)}(\varepsilon; \mathbf{t}) - g^{(N)}(\varepsilon; \theta) = \\ &= (\mathbf{t}^j - \theta^j) g_j(\varepsilon; \theta) - \frac{1}{2} \|\mathbf{t} - \theta\|_0^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{t}^j - \theta^j) (\mathbf{t}^k - \theta^k) [g_{jk}(\varepsilon; \theta) + \delta_{jk}] + \\ &+ \frac{1}{6} \|\mathbf{t} - \theta\|^3 g_{vvv}'''(\varepsilon; \mathbf{x}(\xi)), \end{aligned} \quad (11.27)$$

где $\|\mathbf{t} - \theta\|_0^j = t^j - \theta^j$, $\forall j$, $\mathbf{x}(\xi) = (1 - \xi)\theta + \xi\mathbf{t}$ — точка отрезка, соединяющего θ и \mathbf{t} ; при $\|\mathbf{t} - \theta\|_0 < \rho(\mathcal{F})$ этот отрезок целиком лежит внутри компакта $K(F) \subset \Theta$; $\xi = \xi(\omega)$.

Л е м м а 11.8. Пусть $\{P_t, t \in F\}$ — 3-гладкое компактное подсемейство и $g^{(N)}(\varepsilon; \mathbf{t})$ — логарифмическая функция правдоподобия, $\theta \in F \subset \Theta \subseteq \mathbb{R}^n$.

1°. Для любого направления $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\|_0 = 1$,

$$|\mathbf{v}^j g_j(\theta)|^2 \leq [g_1(\theta)]^2 + \dots + [g_n(\theta)]^2 = \|\text{grad}_\theta g\|_0^2, \quad (11.28)$$

$$|\mathbf{v}^j \mathbf{v}^k [g_{jk}(\theta) + \delta_{jk}]|^2 \leq \sum_{jk} [g_{jk} + \delta_{jk}]^2. \quad (11.29)$$

2°. Для центральных моментов выполнены неравенства.

$$E_\theta^{(N)} \{\sum_j [g_j(\theta)]^2\}^m \leq n^m C(2m) \mathcal{H}^{2m} N^{-m}, \quad m = 1, \dots, 6; \quad (11.30)$$

$$E_\theta^{(N)} \{\sum_{jk} [g_{jk}(\theta) + \delta_{jk}]^2\}^m \leq n^{2m} 2^{m-1} C(2m) \mathcal{H}^{4m} N^{-m},$$

$$m = 1, 2, 3; \quad (11.31)$$

$$E_\theta^{(N)} \{\sum_i [h(\omega^i)]^3 - N E_\theta [h(\omega)]^3\}^{2m} \leq 2^{2m-1} C(2m) \mathcal{H}^{6m} N^m,$$

$$m = 1, 2. \quad (11.32)$$