

параметрического представления задания. Перейдем на язык статистических моделей $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Решая задачу статистического точечного оценивания, при некотором параметрическом описании семейства $\mathcal{P} \ni P$, нам, как уже отмечалось, хотелось бы знать статистические свойства оценок при естественных или хотя бы просто «разумных» параметризациях. Дифференциальная геометрия как раз указывает, что является «разумным». Очень важное свойство дуги Γ класса $C^{(1)}$ — ее спрямляемость и возможность взять длину $\sigma = \sigma(P, P_0)$ дуги P_0P , отсчитываемой от какой-то фиксированной ее точки P_0 , за способ ее натуральной параметризации. А разумными следует считать такие параметризации θ , что $d\theta/d\sigma$ обращается в 0 или ∞ лишь в конечном числе «сингулярных» точек, позволяя всюду на дуге построить поле единичных касательных векторов. Пока речь идет о «дугах» $\mathcal{P} \subset \text{Int Car}_n$, довольно безразлично, с помощью какой карты $\Sigma_n^{(v)}$ задавать метрику в касательном пространстве. Впрочем, если желать строить асимптотическую теорию оценивания, разумнее всего использовать карту $\Sigma_n^{(0)}$. В более сложных ситуациях, когда $\mathcal{P} \cap \partial \text{Car}_n$ не пусто, надо использовать, как мы видели, карту с краем $[\Sigma_n^{(1)}]$ как основную, и карты $[\Sigma_n^{(1/2)}]$ и $\Sigma_n^{(0)}$ — как вспомогательные. Поскольку мы собираемся рассмотреть асимптотику задачи статистического точечного оценивания для семейств взаимно абсолютно непрерывных распределений вероятностей, то в описании гладких семейств $\{P_t\}$ на (Ω, \mathcal{A}) будут использоваться сразу две карты — бесконечномерные аналоги $\Sigma_n^{(1)}$ и $\Sigma_n^{(0)}$. При этом мы будем опираться на установленную леммой 9.6 возможность описывать заряды $R(\cdot)$ конечной $\mathcal{L}^{(2)}(P)$ -нормы (9.33) их производными Радона — Никодима $r(\omega) = (dR/dP)(\omega)$ по основной мере P :

$$\forall R \in \mathcal{L}^{(2)}(P), \quad R(d\omega) = r(\omega) P(d\omega);$$

$$\langle R, R \rangle_P = \int_{\Omega} [r(\omega)]^2 P(d\omega). \quad (10.1)$$

Определение 10.1. Семейство $\{P_t, t \in \Theta\} \subset \text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$ с открытой линейно связной областью $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ изменения параметров назовем $\mathcal{L}^{(2)}$ -непрерывно дифференцируемым (сокращенно, $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д.), если:

1°. Оно $\mathcal{L}^{(2)}$ -дифференцируемо при каждом $\theta \in \Theta$.

2°. Частные производные $P'_j(\cdot | \theta) = (\partial/\partial t^j) P_t(\cdot) |_{t=\theta}$ являются для каждого $\theta \in \Theta$ линейно независимыми зарядами из пространства $\mathcal{L}^{(2)}(P_\theta)$, так что

$$\inf_{\zeta \neq 0} [\zeta^j \zeta^k \delta_{jk}]^{-1/2} \|\zeta^j P'_j(\cdot | \theta)\|_\theta =: c(\theta) > 0. \quad (10.2)$$

3°. Заряды $P'(\cdot | t)$ непрерывны в каждой точке $\theta \in \Theta$

$$\forall t \rightarrow \theta, \quad \|P'_j(\cdot | t) - P'_j(\cdot | \theta)\|_\theta \rightarrow 0.$$