

канонические экспоненциальные семейства распределений вероятностей с естественной канонической параметризацией в качестве геодезической, т. е. семейства, задаваемые плотностями по доминирующей мере

$$\frac{p(\omega; s)}{p(\omega; 0)} = \frac{dP_s}{dP_0}(\omega) = \exp \left[\sum_{j=1}^m s^j q_j(\omega) - H(s) \right], \quad (0.11)$$

где $H(s)$ — логарифм нормирующего делителя

$$\begin{aligned} H(s) &= \ln \int_{\Omega} \exp \left[\sum_j s^j q_j(\omega) \right] P_0(d\omega) = \\ &= I(P_s : P_0) - \sum_j s^j \int_{\Omega} q_j(\omega) P_0(d\omega), \end{aligned} \quad (0.12)$$

$I(P : P_0)$ — информационное уклонение Кульбака [156], [155]

$$I(P : P_0) = \int_{\Omega} [\ln P_0(d\omega) - \ln P(d\omega)] P_0(d\omega). \quad (0.13)$$

Удобно направляющие статистики $q_j(\omega)$ выбирать P_0 -несмещенными

$$\forall j, \quad q_j(\omega; 0) = q_j(\omega) - \int_{\Omega} q_j(\omega) P_0(d\omega), \quad (0.14)$$

что равносильно выбору

$$\forall j, \quad q_j(\omega; 0) = (\partial / \partial s^j) \ln p(\omega; s)|_{s=0}. \quad (0.15)$$

Однако и здесь есть свое «но», свой разрыв между геометрией и статистикой. Естественная каноническая параметризация « s » сама по себе в статистических приложениях не возникает. Зато имеет интерес для статистики двойственная ей *натуральная статистическая параметризация*, определяемая P_s -средними от направляющих статистик

$$s \leftrightarrow t: \forall j, \quad t_j(s) = \int_{\Omega} q_j(\omega) P_s(d\omega). \quad (0.16)$$

А именно, натуральные статистические параметризации канонических экспоненциальных семейств и только они допускают *эффективное оценивание*, обращающее неравенство информации в равенство. Для одномерных семейств это обстоятельство было замечено еще Бхаттачария [81].

Информационное количество Кульбака $I(P : Q)$ определяет асимптотику ошибки при проверке простой гипотезы P против простой альтернативы Q . Вообще говоря, $I(P : Q) \neq I(Q : P)$, что отражает несимметрию отношения похожести случайных явлений. То, что это же количество Кульбака возникает и в теории оценивания параметров, наводит на мысль, что информацион-