

линейных подпространств касательного пространства T_p с естественными координатами (6.16)

$$(d \ln p_1, \dots, d \ln p_n); \quad p_1 d \ln p_1 + \dots + p_n d \ln p_n = 0$$

задает систему всех геодезических линий и вполне геодезических подмногообразий ${}^1\nabla$ -связности, проходящих через точку p .

Таким образом, все эти инвариантные геометрии линейной связности возникают, как проективно-порожденные на гиперповерхности. Этот класс объектов в свое время изучался А. П. Норденом [16], [17], исследования которого, к сожалению, не привлекли внимания геометро-статистиков, не владеющих русским языком (они цитировались только Лауритценом и Ченцовым), см. также [191].

Важнейшими геометрическими характеристиками многообразия являются тензорные поля кручения и кривизны, которые нетрудно вычислить. Из теории двупараметрических канонических экспоненциальных семейств для базисных полей X_i следует

$$[X_j, X_k] = X_j X_k - X_k X_j = 0, \quad (6.42)$$

так как они представляют собой дифференцирования по независимым координатам. Далее, на базисные функции $p_i(P)$ они действуют по формулам

$$X_k p_j = -p_k p_j, \quad k \neq j; \quad X_k p_k = p_k - (p_k)^2. \quad (6.43)$$

Теорема 6.4. При любой инвариантной связности ${}^1\nabla$ *кручение*

$$T(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$$

обращается в ноль тождественно [49], а действие оператора *кривизны*

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad (6.44)$$

на базисных полях задается [14], [52] формулой

$$R(X_i, X_j) X_k = \gamma(\gamma - 1) p_k [(p_j - \delta_{jk}) X_i - (p_i - \delta_{ik}) X_j]. \quad (6.45)$$

С л е д с т в и е. Тензор 1R кривизны Римана—Кристоффеля связности ${}^1\nabla$ пропорционален тензору ${}^{1/2}R$ кривизны связности ${}^{1/2}\nabla$, отвечающей инвариантной римановой метрике Фишера—Бхаттачария—Рао,

$${}^1R = 4\gamma(1 - \gamma) \cdot {}^{1/2}R. \quad (6.46)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как кручение и кривизна Римана—Кристоффеля являются тензорными полями, достаточно вычислить $T(X, Y)$ и $R(X, Y)Z$ на базисных полях. Ввиду симметрии правой части (6.18) относительно перестановки j и k и коммутативности (6.42) имеем $T(X_j, X_k) = 0$ при $j \neq k$. В то же время $T(X_j, X_j) = 0$ по кососимметрии построения. Прямое вычисление $R(X_i, X_j)X_k$ использует определение (6.18) и (6.19) инвариантной связности и формулы (6.43).