

Используя (6.25) и эквивариантность ∇ , получаем

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_j}(X_i))^{dW} &= -\gamma \left(\frac{k_j}{m} \sum_{u \in K(i)} X'_u + \frac{k_i}{m} \sum_{v \in K(j)} X'_v \right) = \\ &= -\gamma \left(\frac{k_i}{m} X_i + \frac{k_j}{m} X_j \right)^{dW},\end{aligned}$$

$$(\nabla_{X_i}(X_i))^{dW} = \gamma \left(\sum_{u \in K(i)} X'_u - 2 \frac{k_i}{m} \sum_{i \in K(i)} X'_i \right) = \gamma \left(1 - 2 \frac{k_i}{m} X_i \right)^{dW},$$

что совпадает для арифметического P с (6.18) и (6.19). Поскольку арифметические P всюду плотны, выполнение последних формул всюду вытекает из предположенной непрерывности кристоффелей.

Теперь мы в состоянии дать очень простое явное описание геодезических линий в связности ${}^1\nabla$ [15], т. е. гладких семейств «векторов» $\{P_z(\cdot)\}$ с канонической геодезической параметризацией z и полем касательных векторов $Z = d/dz$ таким, что

$${}^1\nabla_Z Z = 0. \quad (6.26)$$

всюду на геодезической.

Теорема 6.2. Семейство векторов $p(\theta)$

$$p_j(\theta) = [\mathcal{N}(\theta)]^{-1} \{ \theta |q_j|^\gamma + (1-\theta) |r_j|^\gamma \}^{1/\gamma}, \quad j = 1, \dots, n; \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\theta) &= \{ \theta |q_1|^\gamma + (1-\theta) |r_1|^\gamma \}^{1/\gamma} + \dots \\ &\dots + \{ \theta |q_n|^\gamma + (1-\theta) |r_n|^\gamma \}^{1/\gamma}\end{aligned} \quad (6.28)$$

отвечает ${}^1\nabla$ -геодезической $\{P_\theta(\cdot)\}$, единственной проходящей через $R(\cdot) = P_0(\cdot)$ и $Q(\cdot) = P_1(\cdot)$, $Q, R \in \text{Int Cap}_n$. Отрезок $[\theta^-, \theta^+]$ изменения параметра θ , $\theta^- < 0 < 1 < \theta^+$, определяется пересечением условий

$$\theta |q_j|^\gamma + (1-\theta) |r_j|^\gamma \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.29)$$

При $\gamma \neq 0, 1$ параметр θ не является каноническим геодезическим. Последний определяется квадратурой

$$dz = C [\mathcal{N}(\theta)]^{-2\gamma} d\theta \quad (6.30)$$

с произвольной масштабной константой $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$, и произвольным началом отсчета.

Добавление. При $\gamma = 0$ формулы содержат неопределенность. Ее стандартное раскрытие приводит к каноническому экспоненциальному семейству, см. (4.6), (4.7),

$$\begin{aligned}p_j(\theta) &= [\mathcal{N}(\theta)]^{-1} \exp \{ \theta \ln q_j + (1-\theta) \ln r_j \}, \\ j &= 1, \dots, n;\end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\theta) &= \exp \{ \theta \ln q_1 + (1-\theta) \ln r_1 \} + \dots \\ &\dots + \exp \{ \theta \ln q_n + (1-\theta) \ln r_n \},\end{aligned} \quad (6.32)$$

с областью $-\infty < \theta < \infty$ изменения канонического параметра θ .

Доказательство. Чтобы найти разложение касатель-