

В самом деле, из (2.11) вытекает

$$\forall \theta \in \Theta, P_{\theta}^{(i)} = P_{\theta}^{(j)} \mathcal{W}^{(ji)} = (P_{\theta}^{(ii)} \mathcal{W}^{(ij)}) \mathcal{W}^{(ji)} = P_{\theta}^{(i)} (\mathcal{W}^{(ij)} \circ \mathcal{W}^{(ji)}).$$

Описание структуры семейства всех стационарных распределений вероятностей цепи Маркова с дискретным множеством  $\Omega$  состояний  $\omega$  дается теорией Деблина—Колмогорова, см. литературу в [11], [34]. На каждом классе  $A = A(k)$  сообщающихся существенных состояний  $\omega$  сосредоточено ровно одно стационарное распределение вероятностей  $P_A(\cdot)$ ,  $P_A(\omega) > 0$  при  $\omega \in A$ ;  $P_A(\omega) = 0$  при  $\omega \notin A$ . Все остальные  $\Pi$ -стационарные распределения получаются усреднением этих базовых распределений  $P_{A(k)}(\cdot)$ , т. е. изоморфны совокупности всех распределений вероятностей  $R$  на множестве  $\bigcup A(k) = \Omega - \Omega_0$  с порождаемой атомами  $A(k)$  алгеброй  $\mathcal{A}$  событий. В силу (2.11), соответствие между стационарными распределениями на  $\mathcal{A}^{(1)}$  и  $\mathcal{A}^{(2)}$  взаимно однозначно и линейно. Поэтому крайние «точки»  $P_{A(k)}^{(i)}$  их совокупностей однозначно соответствуют друг другу, равно и как сами атомы. Таким образом, за стандартное пространство  $\Omega$  можно выбрать  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  с конечным или счетным числом исходов  $\omega_k$  (обесструктуренных атомов  $A(k)$ ). Семейство  $\{R_{\theta}\}$  получается сужением любого  $\{P_{\theta}^{(i)}\}$ ,  $f_i(\omega^{(i)}) = \omega_k$  при  $\omega^{(i)} \in A^{(i)}(k)$ . На нуль-множестве  $\Omega_{\theta}^{(i)} f_i(\omega)$  доопределяется произвольным образом. Отсюда  $P_{\theta}^{(i)} f_i^{-1}(\cdot) = R_{\theta}(\cdot)$ ,  $\{P_{\theta}^{(i)}\} \subseteq \{R_{\theta}\}$ . Обратный морфизм задается с помощью условной вероятности, хорошо определенной в рассматриваемом случае:

$$\Pi^{(i)}(\omega_k; \cdot) = P_{A(k)}^{(i)}(\cdot) = P_{\theta}^{(i)}(\cdot | A^{(i)}(k)), \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (2.14)$$

Утверждение, аналогичное теореме 2.2, о существовании изоморфных достаточных алгебр справедливо и для семейств доминированных распределений вероятностей на произвольных измеримых пространствах лебегава типа, см. [187], [29], [96], [34]. Отображения  $f_1$  и  $f_2$  при этом определяются с точностью до значений на множестве меры нуль. Для более сложно устроенных семейств эквивалентность семейства  $\{R_{\theta}\}$  исходным устанавливается только либо в более общей категории статистических морфизмов [169], в которой ядра  $\Pi(\omega; \cdot)$  теряют часть свойств переходной вероятности, либо заменяется на аппроксимативную эквивалентность Ле Кама, см. ниже определение 2.2. Однако в большинстве статистических приложений ограничение дискретными и лебеговыми измеримыми пространствами исходов не является существенным. Даже когда приходится иметь дело с объектами более сложной природы, как, например, в теории случайных процессов или случайных мер, обычно удается свести его к постановке задачи с лебеговым пространством исходов, как это было сделано в § 1 при постановке задачи статистической точечной оценки.