

чем (12.44). Поэтому, будем считать P , Q и R различными, и проведем через них каноническое экспоненциальное семейство. Начало стандартных канонических координат поместим в R , за первую направляющую статистику возьмем $q_1(\omega) = a \ln [(dQ/dP)(\omega)] + b$, где $E_R q_1(\omega) = 0$, $\text{Var}_R q_1(\omega) = 1$. Направляющую статистику $q_2(\omega)$ возьмем нормированной и ортогональной к $q_1(\omega)$. В этой системе P имеет координаты (x, u) , Q — координаты (y, u) ; вторые координаты этих точек должны совпадать. По формуле конечных приращений

$$I(Q : R) - I(P : R) = (y - x) T_1(z, u) = \\ = (y - x) \{ [T_1(x, u) - T_1(0, 0)] + [T_1(z, u) - T_1(x, u)] \},$$

где разности в квадратных скобках оцениваются опять по формуле конечных приращений, с $|(\partial T_1 / \partial s^1)| = |v_{11}(\xi, \eta)| \leq C$ и $|(\partial T_1 / \partial s^3)(\xi, \eta)| = |v_{12}(\xi, \eta)| \leq |v_{11}(\xi, \eta) v_{22}(\xi, \eta)|^{1/2} \leq C$. Делая грубые оценки расстояний между точками на параметрической плоскости и выражая их затем по (12.39), получаем искомое.

Лемма 12.9. Пусть G — область изменения точного канонического параметра канонического экспоненциального семейства \mathcal{P} . Тогда

1°. Подсемейство $\text{Int } \mathcal{P} = \{P_s, s \in \text{Int } G\}$ является простым гладким семейством.

2°. Если замкнутая область $H = [\text{Int } H] \subseteq \text{Int } G$ ограничена и выпукла, то компактное подсемейство $\mathcal{H} = \{P_s, s \in H\}$ квазиоднородно.

Локально каждое подсемейство $\{P_s, s \in F\}$, где $F = \text{Int } F$, $[F] \subset G$, является гладким и, тем самым, $\mathcal{L}^{(2)}$ -н. д. по признаку (11.2). А на компактном семействе с фиксированной параметризацией все его местные аффинные перепараметризации эквивалентны между собой по лемме 11.4.

К гладким компактным выпуклым экспоненциальным подсемействам применима вся теория асимптотически оптимального оценивания, развитая в двух предыдущих параграфах. Однако полученные там закономерности являются асимптотическими, они действуют лишь начиная только при достаточно больших объемах выборки $N \geq N_0$, где N_0 зависит от размерности семейства. Поэтому нам придется использовать более грубые, но зато всегда выполняющиеся неравенства. С другой стороны, мы используем логарифмическую выпуклость интересующих нас подсемейств, которая влечет обязательную единственность оценки максимального правдоподобия на выпуклых подсемействах $\mathcal{F} = \{P_s, s \in F\}$. Покажем, что метод F -максимального правдоподобия можно использовать не только для отыскания неизвестного $P_s \in \mathcal{F}$, но и для приближенной оценки по выборке распределений R , близких к \mathcal{F} .

Лемма 12.10. Пусть $R \in \text{Caph}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{L})$ и пусть s — точная каноническая параметризация канонического экспоненциаль-