

тически он ведет себя как

$$N^{-1} \dim \mathcal{F}. \quad (10.28)$$

Эта закономерность универсальна. Правда, теорема 10.7 относится только к таким оценкам P^* распределения вероятностей P_t , которые принадлежат самому семейству \mathcal{F} или, в крайнем случае, его расширению $\mathcal{P} = \{P_t, t \in \Theta\}$. От этого ограничения, как сейчас увидим, можно освободиться.

Возникают две трудности. Во-первых, допуская в качестве оценки P_N^* любую вероятностную меру из совокупности $\text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$, мы сталкиваемся с проблемой измеримости, — как описать в таком случае измеримое пространство (Δ, \mathcal{D}) выводов, будет ли \mathcal{D} -измеримой функция потерь $L(P^*; P_t) = 2I(P_t : P^*)$ и т. п. Как было отмечено в § 1, для измеримых пространств (Ω, \mathcal{A}) лебегова типа (или дискретных) все трудности успешно преодолеваются, и измеримое пространство $(\text{Car}(\Omega, \mathcal{A}), \mathcal{H}(\mathcal{A}))$ выводов само будет лебегова типа. Вторая трудность состоит в том, что, допуская произвольные вероятностные меры в качестве оценок, мы в самом деле можем достигнуть (для семейств, отличных от канонических экспоненциальных и их выпуклых подсемейств) существенного уменьшения рисков в самых классических задачах.

Пример 10. Подсемейство \mathcal{F} семейства \mathcal{N} двумерных нормальных законов $N(a(\varphi), b(\varphi); \sigma)$ с плотностью

$$f(x, y; \varphi) = [2\pi\sigma^2]^{-1/2} \exp \left\{ -[(x - \cos \varphi)^2 + (y - \sin \varphi)^2] / (2\sigma^2) \right\} \quad (10.29)$$

со средним $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, принимающим значение на единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$, и очень большим стандартом $\sigma \gg 1$.

Достаточной статистикой для такого семейства является

$$\varphi = \arg(\xi, \eta) = (\text{sgn } \eta) \arccos[\xi(\xi^2 + \eta^2)^{-1/2}].$$

Простейшей оценкой параметра φ по наблюдению (ξ, η) будет $\varphi^* = \arg(\xi, \eta)$. Простейшей оценкой самого распределения будет $N(\xi, \eta; \sigma)$. Эта оценка заведомо улучшается, если ее «спроектировать» на выпуклую оболочку «окружности» \mathcal{F} — круг \mathcal{G} с параметрическим множеством $C = \{(a, b) : a^2 + b^2 \leq 1\}$. Однако при очень больших σ почти вдвое выгоднее оказывается тривиальная оценка $P^* = N(0, 0; \sigma)$, вовсе отбрасывающая результат наблюдений. Проведем асимптотическую оценку рисков, помня что для семейства $\mathcal{N}(a, b; \sigma)$ функция потерь по Кульбаку пропорциональна квадрату евклидова расстояния в пространстве параметров. Поскольку при $\sigma \gg 1$ распределение случайной величины $\varphi^* = \arg(\xi, \eta)$ почти равномерно на единичной окружности, то риск $\mathfrak{R}(\varphi)$, который, по симметрии задачи и правила, не зависит от φ , почти пропорционален

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} [(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi] d\varphi = 2,$$