

жение Жордана $\mu(\cdot) = \mu^{(+)}(\cdot) - \mu^{(-)}(\cdot)$ в разность двух неотрицательных мер

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu^{(+)}(A) = \mu(A \cap \Omega^+), \mu^{(-)}(A) = \mu(A \cap \Omega^-).$$

На совокупностях $\text{Sac}(\Omega, \mathcal{A})$ категория марковских морфизмов действует интранзитивно, так как при каждом марковском отображении величина $\mu(\Omega)$ сохраняется (т. е. она является абсолютным или наследственным инвариантом в категории).

Л е м м а 3.1. Полную систему инвариантов заряда μ конечной вариации относительно категории марковских морфизмов образует пара монотонных инвариантов μ^+ и μ^- или пара $\mu(\Omega) = \mu^+ - \mu^-$ и $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Если для двух зарядов $\mu(\Omega_1) = v(\Omega_2)$ и $|\mu| \geq |v|$, то $\mu \leq v$ в марковской геометрии. Если же совпадают оба инварианта, то $\{\mu(\cdot), \mu^{(+)}(\cdot), \mu^{(-)}(\cdot)\} \sim \{v(\cdot), v^{(+)}(\cdot), v^{(-)}(\cdot)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим монотонность, например, μ^+ . По линейности $\mu^+ = (\mu^{(+)}\Pi)(\Omega_2) \geq (\mu^{(+)}\Pi)(C) \geq (\mu\Pi)(C)$, $\forall C \in \mathcal{A}_2$. Таким образом, по (3.3) $\mu^+ \geq \sup(\mu\Pi)(C) \geq (\mu\Pi)^+$. Пусть теперь $\Omega_1 = \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-$ — разложение Хана для μ . Построим при условии $|\mu| \geq |v|$ кусочно-постоянное переходное распределение вероятностей $\Pi(\omega; \cdot)$:

$$\forall \omega \in \Omega_1^+, \Pi(\omega; \cdot) = \frac{\mu^+ + v^-}{\mu^+ + \mu^-} \cdot \frac{v^{(+)}(\cdot)}{v^+} + \frac{\mu^+ - v^+}{\mu^+ + \mu^-} \cdot \frac{v^{(-)}(\cdot)}{v^-},$$

$$\forall \omega \in \Omega_1^-, \Pi(\omega; \cdot) = \frac{\mu^- + v^+}{\mu^+ + \mu^-} \cdot \frac{v^{(-)}(\cdot)}{v^-} + \frac{\mu^- - v^-}{\mu^+ + \mu^-} \cdot \frac{v^{(+)}(\cdot)}{v^+},$$

устанавливающее в силу $\mu^+ - \mu^- = v^+ - v^-$ наложение $\mu\Pi = v$. При дополнительном условии $|\mu| = |v|$, приводящем к $\mu^+ = v^+$, $\mu^- = v^-$; вторые слагаемые в выражении Π уничтожаются, и $(\mu^{(+)}\Pi)(\cdot) = v^{(+)}(\cdot)$, $(\mu^{(-)}\Pi)(\cdot) = v^{(-)}(\cdot)$.

Т е о р е м а 3.2. Если инвариантная в марковской геометрии метрика $\rho(P, Q)$ на совокупностях $\text{Car}(\Omega, \mathcal{A})$ задается нормой разности, определенной в пространствах $\text{Sac}(\Omega, \mathcal{A})$, т. е. $\rho(P, Q) = \|P - Q\|$, то эта метрика на совокупностях Car совпадает с расстоянием $d_v(P, Q)$ (см. (0.1)) с точностью до одинакового для всех совокупностей постоянного множителя.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3.1 вытекает, что все дизъюнктивные пары (P, Q) , т. е. такие, что $P(A) = 1 = Q(B)$, где $A \cap B = \emptyset$, марковски конгруэнтны. Поэтому $\rho(P, Q) = 2c$ для таких пар. Свяжем с произвольной парой $P \neq Q$ дизъюнктивную пару $P'(\cdot) = a^{-1}(P - Q)^{(+)}(\cdot)$, $Q'(\cdot) = a^{-1}(P - Q)^{(-)}(\cdot)$, где $a = (P - Q)^+ = (P - Q)^- = \frac{1}{2}d_v(P, Q)$. Поскольку $P - Q = a(P' - Q')$, то, по свойству нормы, $\|P - Q\| = a\|P' - Q'\| = 2ac = cd_v(P, Q)$.

Для упорядоченной пары взаимно абсолютно непрерывных распределений вероятностей существует минимальная достаточная (т. е. необходимая и достаточная; см. [135], [4]) статистика — отношение правдоподобия, задаваемое производной Радона-Никодема